universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Wie man beim Pokern gewinnt – Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zum Spiel Poker

Verfasserin

Carina Krupitschka

Angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, März 2011

Studienkennzahl laut Studienblatt:	A 190 406 313
Studienrichtung laut Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geschichte
Betreuer:	ao. Prof. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Die Wahrscheinlichkeitstheorie **7**

2.1 Historische Betrachtungen 7

2.2 Terminologie 11

2.3 Axiomatische Wahrscheinlichkeit 12

2.4 Laplace-Experimente 16

2.5 Unabhängigkeit 17

2.6 Kombinatorik 20

2.7 Erwartungswert und Standardabweichung 24

2.7.1 Erwartungswert 24

2.7.2 Varianz 26

2.8 Die Gesetze der großen Zahlen 27

3 Das Pokerspiel **31**

3.1 Die Pokerkarten 32

3.2 Der Dealer 34

3.3 Die Pokerchips 35

3.4 Turnier/Cash Game 36

4 Draw Poker **37**

4.1 Five Card Draw 37

4.1.1 Die Regeln 38

4.1.2 Die Chancen auf ein gutes Blatt . . . 39
4.2 Triple Draw . . . 44
4.2.1 Die Regeln . . . 44
4.2.2 Die Chancen auf ein schlechtes Blatt . . . 44

5 Hold'em Poker **47**
5.1 Texas Hold'em . . . 47
5.1.1 Die Regeln . . . 48
5.1.2 Die Chancen auf ein gutes Blatt . . . 49
5.2 Omaha Hold'em . . . 68
5.2.1 Die Chancen auf ein gutes Blatt . . . 68
5.2.2 Omaha/8 . . . 70

6 Stud Poker **71**
6.1 Five Card Stud . . . 71
6.2 Seven Card Stud . . . 72
6.3 Tropical Stud . . . 72

7 Betrachtungen zum Spielverlauf **79**
7.1 Spielsituationen bei Five Card Draw . . . 79
7.1.1 Tausch . . . 80
7.1.2 Anzahl der Spieler . . . 85
7.2 Spielsituationen bei Texas Hold'em . . . 92
7.2.1 Gewinnbringende Hole–Cards . . . 92
7.2.2 Made Hand vs. Draw Situationen . . . 100
7.2.3 Potgröße . . . 105

8 Glücks- vs. Geschicklichkeitsspiel **109**

9 Resümee **113**

10 Schlusswort **115**

11 Glossar **117**

12 Bibliographie **119**

12.1 Literaturverzeichnis 119

12.2 Internetquellen 120

12.3 Abbildungsverzeichnis 121

13 Lebenslauf **123**

Kapitel 1

Einleitung

Glücksspiele sind faszinierend. Das können nicht nur die zahlreichen Besucher von Casinos bestätigen. Auch zu Hause wird in privaten Runden gerne gespielt, manchmal um Geld, manchmal aber auch nur zum Spaß. Zu den beliebtesten Glücksspielen gehört Poker. Doch dieses Spiel hat mehr zu bieten als Spaß, Nervenkitzel und Ärger über Geldverluste. In dieser Arbeit soll der wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekt des Pokerspiels betrachtet werden. Welche Faktoren entscheiden über Sieg oder Niederlage? Ist alles nur Zufall, oder lässt sich dem Glück in der einen oder anderen Weise nachhelfen? Mit Hilfe von Berechnungen soll im Folgenden versucht werden diese und andere Fragen zu beantworten.

Zu Beginn dieser Arbeit wird ein historischer Abriss der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie gegeben. Anschließend werden grundlegende Definitionen, Sätze und Beispiele angeführt, die zum Verständnis der Lösungswege einzelner Fragestellungen von Bedeutung sein werden. Es handelt sich dabei um Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie, die auch in der gymnasialen Oberstufe unterrichtet werden.

Nach der wahrscheinlichkeitstheoretischen Einleitung beginnt der Hauptteil dieser Arbeit. Zu Beginn werden die Wahrscheinlichkeiten für das zufällige Ziehen der einzelnen Pokerkombinationen bei den beiden bekanntesten Pokervarianten, Five Card Draw und Texas Hold'em, berechnet. Diese sollen auch zur Lösung späterer Problemstellungen verwendet werden. Natürlich werden auch weniger bekannte Pokerspiele, wie Stud Poker, am Rande erwähnt werden, da diese ebenfalls interessante Fragen aufwerfen. Mit diesem Wissen ausgestattet sollen nun einzelne Spielsituationen durchgespielt werden. Auf der Suche nach Faktoren, die den Ausgang eines Pokerspiels beeinflussen, wird zunächst das Tauschverhalten bei Five Card Draw näher untersucht. Wie viele und welche Karten sollte ein Spieler bei einem bestimmen Blatt tauschen, um seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren? Dies wirft die Frage auf, ob sich die Gewinnwahrscheinlichkeit mit der zunehmenden Anzahl an Spielern verändert. Doch auch das Spiel Texas Hold'em wirft interessante Fragestellungen auf. Welche Startkarten sollten gespielt werden und wann sollte ein Spieler besser aus dem Spiel aussteigen? Die Lösung des zweiten Problems steht im engen Zusammenhang mit der Größe des Pots, wie am Ende dieser Arbeit gezeigt werden soll. Im Anhang befindet sich ein Glossar, das zum Verständnis der spezifischen Pokerbegriffe nützlich sein kann.

Die Beschreibungen der Spielregeln der einzelnen Pokervarianten folgen dem Reglement von Casinos Austria.

Die Autorin verzichtet zum Zweck der besseren Lesbarkeit auf die Verwendung gendergerechter Sprache und wählt im Folgenden die grammatikalisch einfachere Form. Wenn etwa von Spielern die Rede sein wird, sind auch weibliche Spielerinnen gemeint.

Kapitel 2

Die Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1 Historische Betrachtungen

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik sind heutzutage neben Analysis und analytischer Geometrie zwei der wichtigsten Bestandteile des Mathematikunterrichts. Dies ist jedoch eine verhältnismäßig neue Entwicklung. Obwohl bereits die Griechen und Römer sich die Zeit mit Glücksspielen vertrieben, existiert die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Theorie erst seit dem 17. Jahrhundert, wobei das axiomatische Fundament nicht vor dem 20. Jahrhundert hinzugefügt werden konnte. Eine einheitliche Definition für den Begriff Wahrscheinlichkeit konnte aber bis heute nicht gefunden werden.

Jedes mathematische Teilgebiet hat seine eigenen Aufgaben.

> *Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist der Zweig der Mathematik, der sich mit Zufallsexperimenten befasst, mit ihrer Beschreibung und der Aufdeckung von Gesetzmäßigkeiten.*[1]

Als Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird offiziell der Briefwechsel der französischen Mathematiker Pierre Fermat und Blaise Pascal gesehen, den die beiden 1654 über Lösungen verschiedenster Fragestellungen des französischen Edelmannes Chevalier de Méré über Gewinnaussichten bei Glücksspielen führten. Insbesondere gelang es Pascal das sogenannte Teilungsproblem zu lösen. Darin geht es um die Gewinnaufteilung bei einem Spiel, das vorzeitig abgebrochen werden muss. Dieses Problem soll später noch genauer

[1]Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. S. 1.

behandelt werden. Die Lösung dazu beschrieb Pascal in seiner Abhandlung „Traité du triangle arithmétique", die jedoch erst nach seinem Tod veröffentlicht wurde. Christiaan Huygens, ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker erfuhr von dem Briefwechsel, konnte sich jedoch keine genauen Informationen über den Rechenweg beschaffen. Also suchte er nach eigenen Lösungen zu diesen Problemen. Huygens war auch der erste, der mit Erwartungswerten rechnete.[2]
Außerdem arbeitete er an selbständig formulierten Fragestellungen, die er 1657 in seinem Hauptwerk „De ratiociniis in ludo aleae" veröffentlichte. Dies war die erste systematische Abhandlung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung der Geschichte, denn Pascals Werk wurde erst danach veröffentlicht.[3]
Für die Probleme, die Fermat, Pascal und Huygens in mühevoller Arbeit gelöst haben, existieren heute einfache Lösungen, die auch in Oberstufen von Allgemeinbildenden Höheren Schulen unterrichtet werden.

Jakob Bernoulli hatte 1713 in seinem Buch „Ars coniectandi" (Kunst des Vermutens) die Ideen Huygens' aufgegriffen und weitergeführt. Hauptsächlich widmete er sich kombinatorischen Fragen. Doch schon einige Zeit davor zeigte Bernoulli unter anderem Interesse für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. In den „Meditationes", die von Bernoulli wie ein wissenschaftliches Tagebuch geführt wurden, beschäftigte er sich, neben seinem Hauptinteresse – der Infinitesimalrechnung [4] – ab 1683 auch mit der Glücksspielrechnung. Er griff dabei Huygens' Problemstellungen wieder auf und beschäftigte sich mit Chancenverhältnissen. Bald begann Bernoulli die Ergebnisse seiner Rechnungen auf Alltagssituationen zu übertragen, wie zum Beispiel die Flucht vor einem Erdbeben oder die Verteilung des Erbes bei einem Ehevertrag. Bis 1690 hatte er vermutlich sämtliche Materialien für seinen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefunden. Es sollte allerdings bis nach seinem Tod 1705 dauern, bis sie auch veröffentlicht wurden. Sein Werk „Ars coniectandi" enthält großteils die Überlegungen aus seinen „Meditationes". Im ersten der vier Teile des Buches gab er Huygens' Abhandlung wortwörtlich wieder, fügte allerdings ausführliche Kommentare hinzu. Im zweiten Teil beschäftigte er sich mit der Kombinatorik. Diese beiden theoretischen Teile benutzte Bernoulli im dritten Teil, um Anwendungsbeispiele zur Glücksspielproblematik zu lösen. Erst im vierten Teil widmete er sich dem Wahrscheinlichkeitsbegriff. Er verwendete

[2] vgl.: Hauser, Walter (1997): Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Verbindung von Glücksspieltheorie und statistischer Praxis vor Laplace. Franz Steiner Verlag, Stuttgart. S. 15.

[3] vgl.: Bandelow, Christoph (1989): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim; Wien; Zürich. S. 18.

[4] Infinitesimalrechnung ist eine früher häufig gebrauchte Technik der Differential- und Integralrechnung. Sie wurde durch Grenzwertberechnungen abgelöst.

hierzu nicht nur die Ergebnisse von Huygens, sondern auch die Entwicklungen in der Statistik, deren Anfänge auf den Engländer John Graunt zurückgehen. Bernoulli verband beide Teilgebiete miteinander und interpretierte sie somit neu. Er war es auch, der die Urne als Hilfsmittel zur Verdeutlichung wahrscheinlichkeitstheoretischer Probleme heranzog. Außerdem stammt von ihm die erste Version des Gesetzes der großen Zahlen.[5]

Fünf Jahre nach Jakob Bernoullis fundamentaler Veröffentlichung, kam das nächste wichtige wahrscheinlichkeitstheoretische Werk auf den Markt: „The Doctrine of Chances“ vom französischen Mathematiker Abraham de Moivre. Er konnte darin das Gesetz der großen Zahlen, das Bernoulli bereits aufgestellt hatte, verschärfen und bewies die Konvergenz der Binomialverteilung gegen die Normalverteilung. Neben der Normalverteilung wird ihm auch die Formulierung des zentralen Grenzwertsatzes zugeschrieben.[6]

De Moivres „Doctrine of Chances“ wurde erst 1795 abgelöst. Pierre-Simon Laplace, ein französischer Mathematiker und Astronom, veröffentlichte sein Lehrbuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung „Théorie analytique des probabilités“. In diesem Werk behandelte Laplace Experimente mit endlich vielen, gleich wahrscheinlichen Ergebnissen.[7]

Doch auch im 19. Jahrhundert gab es noch zahlreiche Mathematiker, die zu neuen Erkenntnissen in der Wahrscheinlichkeitstheorie kamen. Darunter finden sich zum Beispiel: Johann Carl Friedrich Gauß, Pafnuti L. Tschebyschev oder Andrej A. Markov. In dieser Zeit wurden schließlich auch die Anwendungsbereiche der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter ausgedehnt. Sie fand nun in der statistischen Mechanik, der Vererbungslehre und dem Versicherungswesen Verwendung.[8]

Den Beweis, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung längst eine ernstzunehmende Teilwissenschaft der Mathematik war und bis heute ist, erbrachte 1900 David Hilbert. Der deutsche Mathematiker stellte im Rahmen des zweiten internationalen Mathematikerkongresses seine berühmte Liste von 23 Problemen der damals ungelösten mathematischen Probleme vor. Die Lösung dieser Probleme war für Hilbert von zentraler Bedeutung, da sie im jeweiligen Teilgebiet der Mathematik einen gewaltigen Fortschritt bedeutet hätte. Bis zum heutigen Tag wurden die meisten Aufgaben gelöst, was den Mathematikern, welche die Lösung fanden, großen Ruhm einbrachte. Im sechsten Problem forderte Hilbert die mathematische Behandlung der Axiome der Physik.

[5] vgl.: Hauser, Walter (1997): S 74–89.
[6] vgl.: Hauser, Walter (1997): S. 150f.
[7] vgl.: Bandelow, Christoph (1989): S. 18.
[8] vgl.: Bandelow, Christoph (1989): S. 19.

> *Durch die Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt,* nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.
> *Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Vgl. Bohlmann, Ueber Versicherungsmathematik 2te Vorlesung aus: Klein und Riecke, Ueber angewandte Mathematik und Physik, Leipzig und Berlin 1900) angeht, so scheint es mir wünschenswert, daß mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwicklung der Methode der mittleren Werte der in der mathematischen Physik, speciell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe.* [9]

Das Problem der Axiomatisierung der Physik ist bis heute ungelöst.

Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie sollte nicht mehr allzu lange auf sich warten lassen. Erste Versuche machte der österreichische Mathematiker Richard von Mises. 1919 versuchte er vergebens in seinem Werk „Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung" mit Hilfe eines analytischen Grenzwertbegriffes die Wahrscheinlichkeit zu definieren. Doch erst dem russischen Mathematiker Andrej Nikolaevič Kolmogorov gelang 1933 in seiner Schrift „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" die axiomatische Einführung der Wahrscheinlichkeit als normiertes Maß auf einem messbaren Raum.[10]

Im Laufe der Geschichte musste die Wahrscheinlichkeitstheorie auch massenhaft Kritik einstecken. Die Theologie warf der Wahrscheinlichkeitsrechnung Blasphemie vor, da ihre Hauptbeschäftigung darin bestand den Zufall (Schicksal) berechnen zu wollen. Auch die Anhänger der Aufklärung waren mit diesem Teilgebiet der Mathematik äußerst unzufrieden, da sie von deterministischen Naturgesetzen ausgingen und somit die Existenz des Zufalls überhaupt bestritten. Doch selbst Mathematiker standen der neuen Entwicklung mit Skepsis gegenüber, denn bisher war ihr einziges Ziel die Gültigkeit von Vermutungen zu beweisen, und zwar mit 100 prozentiger Sicherheit.

[9] Hilbert, David (1900): Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. In: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. Zeitschriftenband. S. 253–297. DigiZeitschriften. Das deutsche digitale Zeitschriften Archiv: `http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN002498863`, (12.02.2011). S. 272.

[10] vgl.:Bandelow, Christoph (1989): S. 19.

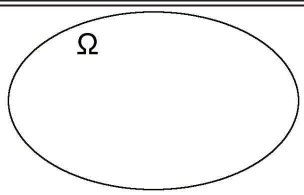
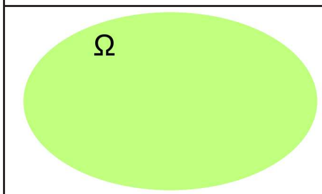
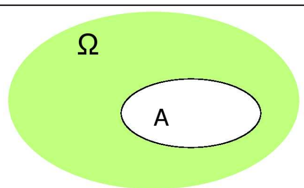
Trotz aller Kritik wurde die Wahrscheinlichkeitstheorie zu einer der wichtigsten Teilgebiete der Mathematik, die im Unterricht, im Finanz- und Bankenwesen und in unzähligen anderen Bereichen Anwendung gefunden hat.

2.2 Terminologie

In diesem Kapitel sollen diverse Grundbegriffe geklärt werden, die in dieser Arbeit laufend gebraucht werden. In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden Elementarergebnisse ω eines Zufallsexperiments betrachtet. Die Menge aller Ergebnisse wird als Ereignisraum Ω bezeichnet. Manchmal werden auch allgemeinere Ereignisse benötigt. Diese werden als $A \subseteq \Omega$ bezeichnet.

Dies soll nun anhand eines Würfels erklärt werden:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Als Ereignis könnte man das Werfen einer geraden Zahl wählen: $A = \{2, 4, 6\}$.
Ein Ergebnis ist das Werfen einer bestimmen Zahl, zum Beispiel: $\omega = 2$.

Ereignisse können wie Mengen betrachtet werden. In der Wahrscheinlichkeitstheorie finden sich häufig Begriffe wie Teilmenge, Vereinigungsmenge, Schnittmenge oder leere Menge. Die nachfolgende Grafik soll helfen, sich unter diesen Begriffen etwas vorstellen zu können.

Darstellung	Bezeichnung	Bedeutung in der Wahrscheinlichkeitstheorie
	$\emptyset$	das unmögliche Ereignis
	Ω	das sichere Ereignis
	$\Omega \backslash A$	Ereignis A tritt nicht ein

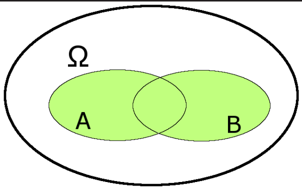
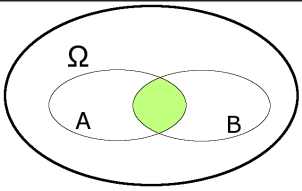
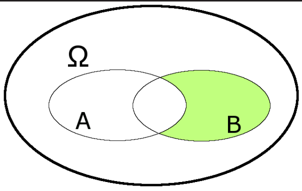
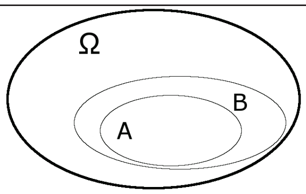
Darstellung	Bezeichnung	Bedeutung in der Wahrscheinlichkeitstheorie
	$A \cup B$	Ereignis A oder B tritt ein
	$A \cap B$	Ereignisse A und B treten ein
	$B \backslash A$	Ereignis B tritt ein, A aber nicht
	$A \subseteq B$	wenn A eintritt, tritt auch B ein

Abb. 1

2.3 Axiomatische Wahrscheinlichkeit

Auch die Wahrscheinlichkeitstheorie ist, wie jedes Teilgebiet der Mathematik, auf Axiomen aufgebaut. Es wird von Ereignissen (Mengen) ausgegangen, denen eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 zugeordnet wird.

> *Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist jene Zahl, um die sich die relativen Häufigkeiten des Ereignisses bei einer großen Serie von Wiederholungen des Experimentes im allgemeinen zu stabilisieren scheinen.*[11]

[11] Bandelow, Christoph (1989): S. 13.

Aufgrund dieser Erfahrungen können Axiome abgeleitet werden, welche die Grundbausteine der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden. Mit deren Hilfe können alle weiteren Aussagen abgeleitet werden. Axiome selbst sind allerdings nicht beweisbar. Das Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde von Andrej Nikolaevič Kolmogorov aufgestellt und 1933 in seinem Werk „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" veröffentlicht.[12]

Zuerst sollen die Axiome formuliert werden, später wird erklärt welche Ereignisse zulässig sind.

Axiom 1: Sei Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments und $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Dann gibt es eine Funktion P, die jedem Ereignis A eine nicht negative Wahrscheinlichkeit zuordnet.

$$P(A) \geq 0$$

Weiters sind Ω und $\Omega \backslash A$ Ereignisse. Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Ereignisse, so sind auch $A_1 \cap A_2$ und $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ Ereignisse.

Axiom 2: $P(\Omega) = 1$.

Axiom 3: Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Ereignisse, so gilt:

$$P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$$

Beispiel: Die Bedeutung der Axiome soll anhand eines Würfelbeispiels verdeutlicht werden. Die einzelnen Augen des Würfels, die bei einem Wurf geworfen werden können, werden Elementarereignisse genannt. Sie entsprechen den natürlichen Zahlen 1–6: $\omega = 1, ..., 6$.
Oft werden aber kompliziertere Ereignisse betrachtet. Das Ereignis „Augenzahl ist gerade" entspricht zum Beispiel der Menge $A = \{2, 4, 6\}$.
Alle Ereignisse sind Teilmengen von $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Auch Ω (eine der Zahlen 1 bis 6 zu würfeln) und die leere Menge $\emptyset$ (keine der Zahlen 1 bis 6 zu würfeln) sind Teilmengen von Ω. Das Ereignis, irgendeine Zahl von 1 bis 6 zu würfeln, tritt sicher ein, also $P(\Omega) = 1$, während das Ereignis keine dieser Zahlen zu würfeln, unmöglich ist.

[12] vgl.: Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): S. 11.

Die Eigenschaft des dritten Axioms wird auch σ -Additivität genannt. Um diesen Begriff nachvollziehen zu können, wird eine Definition benötigt, welche die Anforderungen ausdrückt, die an ein Ereignissystem gestellt werden.

Definition: Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω heißt **σ-Algebra**, falls:
(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii) $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ nennt man **Ereignisraum**.

Im ersten Axiom wurde bereits erwähnt, dass es sich bei dem Begriff Wahrscheinlichkeit um eine Funktion handelt, die jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Dieses Maß soll nun genauer definiert werden, wobei $\mathbb{R}^+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen bedeutet.

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Ereignisraum. Eine Funktion $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, welche die Axiome 2 und 3 erfüllt, nennt man **Wahrscheinlichkeitsmaß**.
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt dann **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Diese Wahrscheinlichkeitsräume spielen die Hauptrolle in den wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen.

Aus den Axiomen können sofort die ersten Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes abgeleitet werden.

Satz: (i) $P(\emptyset) = 0$.

(ii) $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$, *falls* A_i $(1 \leq i \leq n)$ *paarweise disjunkte Ereignisse sind* $(n \in \mathbb{N})$.

(iii) $\forall A \in \mathcal{A} : 0 \leq P(A) \leq 1$.

(iv) *Sind* $A_1 \subseteq A_2$ *Ereignisse* $\Rightarrow\; P(A_1) \leq P(A_2)$.

(v) $P(\Omega \backslash A) = 1 - P(A)$.

Beweis. ad (i) Sei $A_i := \emptyset$. Somit sind alle $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt.

$$\Rightarrow P(\emptyset) = P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

In Axiom 3 heißt es: $P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$.

$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

□

ad (ii) Seien $A_{n+1} := A_{n+2} := ... := \emptyset$. Mit Hilfe des 3. Axioms erhält man:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

□

ad (iv) Falls $A_1 \subseteq A_2$, dann gilt:

$$A_2 = A_1 \cup ((\Omega\backslash A_1) \cap A_2) \;\Rightarrow\; P(A_2) = P(A_1) + P((\Omega\backslash A_1) \cap A_2)$$

$$\Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$$

□

ad (iii) Laut dem 1. und dem 2. Axiom sind $P(A) \geq 0$ und $P(\Omega) = 1$. Mit Hilfe von (iv) erhält man:

$$0 \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

□

ad (v) $A \cup (\Omega\backslash A) = \Omega$.

$$\Rightarrow P(A) + P(\Omega\backslash A) = P(\Omega) = 1$$

□

Beispiel: (i) Zurück zu dem Würfelbeispiel oben. Bei einmaligem Würfeln keine der Zahlen 1 bis 6 zu würfeln ist unmöglich. Also $P(\emptyset) = 0$.

(ii) Beim Schießen auf eine Dartscheibe trifft ein Spieler das Bull's Eye (Kreis in der Mitte der Dartscheibe) – Ereignis A_1 – mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,09 und das Bull (Kreisring um das Bull's Eye) – Ereignis A_2 – mit der Wahrscheinlichkeit von 0,24. Nun soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass der Spieler das Bull's Eye oder das Bull trifft. Es handelt sich also um die Wahrscheinlichkeit, dass die Vereinigung der Mengen A_1 und A_2 eintritt. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,09 + 0,24 = 0,33$.

(iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler weder das Bull's Eye, noch das Bull trifft. Es handelt sich dabei um die Gegenwahrscheinlichkeit. $P(\Omega\backslash(A_1 \cup A_2)) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0,33 = 0,66$.

2.4 Laplace-Experimente

> *Laplace-Experimente sind Zufallsexperimente mit endlich vielen, gleich wahrscheinlichen Ergebnissen.*[13]

Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Laplace-Experiment**, falls Ω eine endliche Menge ist und alle einelementigen Teilmengen $\omega \in \Omega$ die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ werden üblicherweise als „mögliche Fälle“ bezeichnet, während alle Ergebnisse in A die „günstigen Fälle“ darstellen.

Definition: Sei Ω ein endlicher Ereignisraum. Für $A \subseteq \Omega$ definiert

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

die **Laplace-Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf Ω.
$|A|$ bezeichnet sie Mächtigkeit von A.
(Ω, P) heißt **Laplace-Raum**.

Um Laplace-Experimente lösen zu können, müssen also die jeweiligen Mächtigkeiten bestimmt werden. Dies wird die Hauptaufgabe der Kombinatorik sein, auf die später noch genauer eingegangen wird.

Lemma: (i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *für* A, B *disjunkt.*

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Beweis. (i) und (ii) folgen direkt aus den Axiomen 2 und 3.

ad (iii) Die Menge $A \cup B$ wird in die disjunkten Teilmengen $A \backslash B$, $B \backslash A$ und $A \cap B$ zerlegt. Nun folgt aus Axiom 3:

$$P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(A \cap B) + P(B \backslash A)$$

Da $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ und $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$, folgt durch umformen und einsetzen:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) =& (P(A) - P(A \cap B)) + P(A \cap B) + (P(B) - P(A \cap B)) \\ =& P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

□

[13] Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): S. 7.

Während der Anfänge der Wahrscheinlichkeitstheorie gab es zahlreiche Fragestellungen, die unter den renommiertesten Mathematikern Streit verursachten. Heutzutage gehören diese Aufgaben zu den Grundbeispielen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule. Eines dieser berühmten Beispiele soll nun vorgestellt werden.

Beispiel (Croix ou Pile): Der französische Mathematiker und Physiker Jean d'Alembert beschäftigte sich mit der Frage wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, beim Werfen von zwei unverfälschten Münzen mindestens einmal Kopf zu werfen. 1754 schrieb er in dem Artikel „Croix ou Pile“ (Kopf oder Zahl), dass das Ergebnis dieser Aufgabe $\frac{2}{3}$ sei.[14]

Zunächst wird der Ereignisraum der beiden Würfe bestimmt:
$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$, wobei K für Kopf und Z für Zahl steht.
Das Ereignis, das für dieses Beispiel gesucht ist, besteht aus der Menge $A = \{KZ, ZK, ZZ\}$. Laut der Formel von Laplace kann man nun die Wahrscheinlichkeit berechnen: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$.

1814 wurde d'Alemberts Ansicht von Laplace kritisiert, da er entdeckte, dass die Möglichkeiten KZ und ZK unterschieden werden müssen. Laut heutiger Interpretation wollte d'Alembert allerdings nur die damalige Auffassung der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Diskussion stellen.[15]

Es sollen später noch zwei weitere bekannte Paradoxa aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgestellt werden, jedoch werden zu deren Lösung zusätzliche Informationen gebraucht.

2.5 Unabhängigkeit

Die Unabhängigkeit zweier oder mehrerer Ereignisse ist ausschlaggebend für den weiteren Rechengang. Der Begriff der Unabhängigkeit bedeutet in diesem Zusammenhang:

> *(Die)Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A wird nicht beeinflusst durch die Information, dass B eingetreten ist, und umgekehrt gibt das Eintreten von A keine Veranlassung zu einer Neubewertung der Wahrscheinlichkeit von B.*[16]

[14] vgl.: Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): S. 8.
[15] vgl.: Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): S. 8f.
[16] Georgii, Hans-Otto (2007): Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Walter de Gruyter, Berlin. S. 66.

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen **stochastisch unabhängig** bezüglich P, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Beispiel: In einer Urne befinden sich 3 weiße und 5 schwarze Kugeln. Folgende Ereignisse werden betrachtet:
A: die erste Kugel ist weiß.
B: die zweite Kugel ist schwarz.

(i) Es werden nun zwei Kugeln aus dieser Urne mit Zurücklegen gezogen. Somit gilt $P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{8} = \frac{3}{8}$ und $P(B) = \frac{8}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$. Diese beiden Ereignisse sind unabhängig, denn: $P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$.

(ii) Nun soll sollen zwei Kugeln aus derselben Urne ohne Zurücklegen gezogen werden. Nun ist $P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$. Diese Ereignisse sind also nicht unabhängig, denn $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Zwei Ereignisse, von denen mindestens eines die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 besitzt sind trivialerweise unabhängig. Auch die folgenden Zusammenhänge können leicht eingesehen werden:

Satz: *Falls A, B unabhängig $\Rightarrow$ $A, (\Omega \backslash B)$; $(\Omega \backslash A), B$ und $(\Omega \backslash A), (\Omega \backslash B)$ unabhängig.*

Beweis. Es wird nur die erste Behauptung gezeigt, die übrigen werden analog bewiesen.

$$P(A \cap (\Omega \backslash B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(\Omega \backslash B)$$

$\square$

Definition: $A_1, A_2, ..., A_n$ heißen **unabhängig**, wenn für jedes $k \in \{1, 2, ..., n\}$ und für jede Auswahl von Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ gilt:

$$P(A_{i1} \cap ... \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot ... \cdot P(A_{ik})$$

Bemerkung: In dieser Definition reicht paarweise unabhängig nicht aus, alle Ereignisse müssen unabhängig voneinander sein.

Beispiel: Es befinden sich vier Zettel mit den Zahlenkombinationen 112, 121, 211, 222 in einer Urne. Ein Zettel wird blind gezogen. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:
A: die erste Ziffer ist eine 1.
B: die zweite Ziffer ist eine 1.
C: die dritte Ziffer ist eine 1.

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Aber: $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Mit diesem Wissen lassen sich zwei weitere frühere Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösen.

Beispiel (Problem von Christiaan Huygens): 1657 schrieb Christiaan Huygens das Werk „De ratiociniis in ludo aleae“ (Abhandlungen über die bei Glücksspielen möglichen Berechnungen) und bearbeitete darin folgendes Problem:

> *A spielt mit B unter der Bedingung, dass derjenige, welcher zuerst dreimal gewonnen hat, den Spieleinsatz erhält. Nun hat A bereits zweimal, B aber erst einmal gewonnen, und ich will wissen, wie der Spieleinsatz in gerechtem Verhältnisse getheilt werden muss, wenn Beide jetzt das Spiel abbrechen. Wieviel erhält A?*[17]

Angenommen beide Spieler haben dieselbe Gewinnwahrscheinlichkeit, also 0,5. Spieler A würde unter folgenden Umständen das Spiel gewinnen:
E_1: Spieler A gewinnt das nächste Spiel.
E_2: Spieler B gewinnt das nächste und Spieler A das übernächste Spiel (zwei unabhängige Ereignisse).

$P(E_1) = 0,5$, $P(E_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = 0,5 + 0,25 = 0,75$.
Spieler A sollte also 75% des Einsatzes erhalten, wenn das Spiel an dieser Stelle beendet werden soll.

Beispiel (Paradoxon von Chevalier de Méré): Pierre Fermat und Blaise Pascal führten 1654 einen Briefwechsel über die Lösung einiger Fragestellungen, die Chevalier de Méré zum Thema Gewinnwahrscheinlichkeit gestellt hatte. Eines der zahlreichen Probleme lautete folgendermaßen: Die Wahrscheinlichkeit bei viermaligem Würfeln mindestens einmal 6 zu werfen ist

[17] Übersetzung von Propositio IV aus Christiaan Huygens „Abhandlungen über die bei Glücksspielen möglichen Berechnungen“ in: Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): S. 19.

größer als $0,5$, während die Wahrscheinlichkeit bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu werfen kleiner als $0,5$ ist.[18]

Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit einen Sechser zu würfeln benötigt: $P(6) = \frac{1}{6}$.
Die Wahrscheinlichkeit keinen Sechser zu würfeln beträgt demnach:
$P(\text{keine } 6) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
Nun kann Ereignis A, bei viermaligem Würfeln mindestens einmal 6 zu werfen, berechnet werden:

$$P(A) = 1 - P(\Omega \backslash A) = 1 - P(\text{keine } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.51774691$$

Die Ereignisse zweimal eine Sechs, also eine Doppelsechs, zu werfen sind unabhängig $\Rightarrow P(\text{Doppelsechs}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit keine Doppelsechs zu werfen:
$P(\text{keine Doppelsechs}) = 1 - P(\text{Doppelsechs}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.
Das Ereignis B, bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu werfen, besitzt also folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = 1 - P(\Omega \backslash B) = 1 - P(\text{keine Doppelsechs}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49140388$$

Man sieht also, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A knapp über 0,5 liegt, während Ereignis B nur mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp unter 0,5 eintritt.

2.6 Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit dem Abzählen von Mengen, was zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten unabdingbar ist. Meist wird von einer Urne mit n Kugeln ausgegangen aus denen k Kugeln gezogen werden. Die Arten der Ziehung müssen allerdings unterschieden werden. Man kann die gezogene Kugel wieder in die Urne zurücklegen, bevor man die nächste Kugel zieht oder nicht. Außerdem ist manchmal die Reihenfolge der gezogenen Kugeln von Bedeutung (geordnet) und manchmal nicht (ungeordnet). Diese Voraussetzungen beeinflussen die Experimente.

[18] Bandelow, Christoph (1989): S. 18 und 37.

Ziehen mit Zurücklegen, geordnet

Satz: *Zu einer n–elementigen Menge gibt es n^k geordnete Stichproben vom Umfang k mit Zurücklegen.*

Beweis. Jede Koordinate des k–Tupels der Elementarereignisse $(\omega_1, ..., \omega_k)$ kann n Werte annehmen $\Rightarrow \underbrace{n \cdot ... \cdot n}_{k\text{-}mal} = n^k$. $\square$

Beispiel: In einer Urne befinden sich 10 nummerierte Kugeln. Wie viele verschiedene Zahlenfolgen kann man beim Ziehen von 5 Kugeln mit Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge ziehen?
$10^5 = 100000$.

Ziehen ohne Zurücklegen, geordnet

Satz: *Zu einer n–elementigen Menge gibt es*

$$(n)_k := \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

geordnete Stichproben vom Umfang k ohne Zurücklegen.

Beweis. Für die Auswahl der ersten Koordinate des k–Tupels $(\omega_1, ..., \omega_k)$ gibt es n Möglichkeiten, für die der zweiten Koordinate nur noch $(n-1)$ Möglichkeiten. Der Rest folgt analog. $\square$

Falls $k > n$ gilt $(n)_k = 0$. Diese Tatsache erscheint logisch, da es nicht möglich ist mehr Kugeln aus einer Urne zu ziehen, als vorhanden sind. Falls $k = n$, ist $(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1$. In diesem Fall werden alle n Kugeln aus der Urne gezogen.

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1$ verschiedene **Permutationen**.
Weiters gilt: $0! := 1$.

Beispiel: Eine 11-köpfige Fußballmannschaft lost drei Spieler für das Elfmeterschießen aus. Wie viele verschiedene Spielerzusammenstellungen gibt es, wenn die Reihenfolge von Bedeutung ist?
$(11)_3 = \frac{11!}{(11-3)!} = 990$.

Ziehen ohne Zurücklegen, ungeordnet

Nun spielt die Reihenfolge keine Rolle mehr. Man kann sich vorstellen, dass alle k Kugeln auf einmal aus der Urne gezogen werden.

Satz: *Eine n–elementige Menge besitzt*

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

k–elementigen Teilmengen.

Beweis. Zunächst wählt man eine k–elementige geordnete Teilmenge aus der n–elementigen Menge aus. Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen dieser k Koordinaten ist leicht zu berechnen. Es handelt sich um eine Permutation der k Elemente. Mittels Division durch $k!$ erhält man die gewünschte Anzahl. □

Beispiel: Eine Prüfung besteht aus 6 Fragen. 4 davon müssen ausgearbeitet werden, um eine positive Note zu erreichen. Wie viele mögliche Kombinationen gibt es?
$\binom{6}{4} = \frac{(6)_4}{4!} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = 15.$

Bemerkung: $\binom{n}{k}$ wird auch Binomialkoeffizient genannt. $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$.

Satz: *Der Binomialkoeffizient hat unter anderem folgende wichtige Eigenschaften:*
(i) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
(ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Beweis. ad (i) Trivial.
ad (ii) $\binom{n+1}{k+1}$ ist die Anzahl der $(k+1)$–elementigen Teilmengen einer $(n+1)$–elementigen Menge. Darunter findet man $\binom{n}{k}$ Teilmengen, die das Element $(n+1)$ beinhalten und $\binom{n}{k+1}$, die es nicht beinhalten. □

Ziehen mit Zurücklegen, ungeordnet

Satz: *Zu einer n–elementigen Menge gibt es $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$ ungeordnete Proben vom Umfang k mit Zurücklegen.*

Beweis. Angenommen es gibt n verschiedene Kugeln in einer Urne. Es wird eine Tabelle angefertigt, die jedes Element vom nächsten durch einen Strich teilt. Jede Kugel hat also eine eigene Spalte in der Tabelle. Nun wird nach jeder Ziehung ein Punkt bei jener Spalte gemacht, die zur gezogenen Kugel gehört. Anschließend wir die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt. Eine Ziehung von k Kugeln lässt sich demnach folgendermaßen darstellen:

$$\bullet \bullet \ldots \bullet \,|\, \bullet \bullet \ldots \bullet \,|\ldots|\, \bullet \bullet \ldots \bullet$$

In dieser Liste gibt es nun k Punkte und $(n-1)$ Striche, also insgesamt $(k+n-1)$ Symbole. Somit gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten k Punkte auf $(k+n-1)$ Plätzen zu verteilen. $\square$

Beispiel: Wie viele verschiedene Kombinationen von Augenzahlen gibt es beim Werfen von zwei Würfeln?
Ein Würfel hat sechs verschieden bedruckte Seiten $\Rightarrow n = 6$ und es wird zweimal geworfen $\Rightarrow k = 2$. Somit gibt es $\binom{k+n-1}{k} = \binom{2+6-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = 21$ verschiedene Kombinationen.

Bemerkung: Man kann den obigen Satz auch so formulieren: Es gibt $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten, k ununterscheidbare Kugeln auf n unterscheidbare Urnen aufzuteilen.

Die k Kugeln werden also auf n unterscheidbare, zum Beispiel nummerierte, Urnen verteilt, wobei die Kugeln völlig gleich aussehen. Was passiert allerdings, wenn die Kugeln sich in ihrem Aussehen unterscheiden, zum Beispiel in der Farbe?

Satz: *Es gibt $\binom{k}{k_1,k_2,\ldots,k_n} := \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$ Möglichkeiten k unterscheidbare Kugeln auf n unterscheidbare Urnen zu verteilen.*

Beweis. Zunächst sollen die k_1 Kugeln auf die erste Urne verteilt werden. Dafür gibt es bekanntlich $\binom{n}{k_1}$ Möglichkeiten. Für die zweite Urne stehen nun nur noch $k-k_1$ Kugeln zur Verfügung, aus denen k_2 Kugeln gezogen werden: $\binom{k-k_1}{k_2}$. Insgesamt erhält man also für die Verteilung der Kugeln:

$$\binom{k}{k_1}\cdot\binom{k-k_1}{k_2}\cdot\ldots\cdot\binom{k_n}{k_n} =$$
$$= \frac{k!}{k_1!\cdot(k-k_1)!}\cdot\frac{(k-k_1)!}{k_2!\cdot(k-k_1-k_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{k_n!}{k_n!} =$$
$$= \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!} = \binom{k}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$$

$\square$

Um einen besseren Überblick zu bewahren sollen die verschiedenen Ziehungsarten in einer Tabelle zusammengefasst werden.

Satz: *Für das zufällige Ziehen einer k–elementigen Stichprobe aus einer n–elementigen Menge gilt:*

	mit Zurücklegen (Variation)	ohne Zurücklegen (Kombination)	Permutation
geordnet	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{k!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}$
ungeordnet	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$n!$

2.7 Erwartungswert und Standardabweichung

Der Erwartungswert ist eine wichtige Größe in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Man braucht ihn, um bei Glücksspielen den Gewinn und den Einsatz festzusetzen.

> *Bei einer frequentistischen Interpretation von Wahrscheinlichkeit ist dies* (der Erwartungswert, Anm.) *der mittlere Gewinn bei einer langen Folge von Wiederholungen des Spiels, und dies werden wir später bestätigt finden durch das Gesetz der großen Zahlen.*[19]

Die Standardabweichung gibt die Abweichung der Werte vom Erwartungswert an.

2.7.1 Erwartungswert

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **messbar**, falls für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{\omega : X(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$$

(ii) Eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nennt man **Zufallsvariable**.

Somit ist eine Zufallsvariable eine vom Zufall abhängige, veränderliche Größe.

[19] Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): S. 81.

Definition: Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**, wenn es eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $P(X \in D) = 1$.

Definition: Sei X eine diskrete Zufallsvariable.
Falls $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \cdot P(X = x) \leq \infty$, existiert der **Erwartungswert** von X. Er wird definiert durch:

$$\mathbb{E}(X) := \mu := \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$$

Bemerkung: Die Forderung $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \cdot P(X = x) \leq \infty$ nach absoluter Konvergenz ist notwendig, da sichergestellt werden muss, dass die Reihe $\sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$ nicht von der Reihenfolge der Summanden abhängt.

Beispiel: Es wird ein Spiel gespielt, bei dem ein Spieler einen Würfel wirft. Bei einer geraden Augenzahl erhält er für jeden Punkt auf dem Würfel einen Euro. Bei einer ungeraden Augenzahl muss er für jeden Punkt auf dem Würfel einen Euro an die Bank zahlen. Wie hoch ist der Erwartungswert bei diesem Spiel?
$P(X = x) = \frac{1}{6}$ für jede Augenzahl des Würfels. Daher:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1) \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + (-3) \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + (-5) \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot 3 = 0,5\end{aligned}$$

Der Spieler kann also mit einem Gewinn von 50 Cent rechnen, wenn er dieses Spiel spielt.

Satz: *Eigenschaften des Erwartungswertes: Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen. Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$:*

(i) *Monotonie: Für $X \leq Y$ gilt $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.*

(ii) *Linearität:* (a) $\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}(X)$. (b) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

(iii) *Produktregel: Sind X, Y unabhängig so gilt:* $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

(ohne Beweis)

2.7.2 Varianz

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, für die $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$ existiert. Dann ist

$$\mathrm{Var}(X) := \sigma^2 := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$$

die **Varianz** von X.
$\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sigma$ heißt **Standardabweichung**.

> *Die Varianz ist per definitionem die mittlere quadratische Abweichung der Zufallsvariable X von ihrem Erwartungswert und somit ein Maß für die Streuung. Es gibt kein intrinsisches Argument, weshalb man gerade die quadratische Abweichung verwenden sollte und nicht die absolute Abweichung oder eine höhere Potenz.*[20]

Satz: *Sei X eine Zufallsvariable. Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$:*
(i) $\mathrm{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$.

(ii) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Beweis. ad (i): Die Linearität des Erwartungswertes besagt:
$\mathbb{E}(a \cdot X + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(a \cdot X + b) &= \mathbb{E}(a \cdot X + b - (a \cdot \mathbb{E}(X) + b))^2 = \\ &= a^2 \cdot \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

□

ad (ii): Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 &= \mathbb{E}(X^2 - 2 \cdot (\mathbb{E}(X)) \cdot X + (\mathbb{E}(X))^2) = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \end{aligned}$$

□

[20] Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): S. 89f.

2.8 Die Gesetze der großen Zahlen

Die Gesetze der großen Zahlen sind die berühmtesten Gesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie.

> *(Sie haben) die Konvergenz der Mittelwerte gegen den gemeinsamen Erwartungswert zum Gegenstand*[21]

Sei zum Beispiel $X_1, X_2, ...$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die den gleichen Erwartungswert besitzen. Nun ist $M_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ der Mittelwert der ersten n Zufallsvariablen. Je größer n ist, desto näher liegt M_n bei μ. Wenn n nach unendlich strebt, strebt der Unterschied zwischen μ und M_n gegen Null. Es gibt nun zahlreiche Varianten dieses Gesetz zu mathematisieren. Die beiden wichtigsten sind aber das schwache Gesetz der großen Zahlen und das starke Gesetz der großen Zahlen.[22]

Das Gesetz der großen Zahlen geht zurück auf den Mathematiker Jacob Bernoulli, der Anfang des 18. Jahrhunderts seine Version beweisen konnte. Jedoch wurde dieser Beweis erst nach seinem Tod publiziert. Im Laufe der Jahre wurden zahlreiche Veränderungen und Verbesserungen vorgenommen. Erst 1933 erhielt das Gesetz der großen Zahlen seine vorläufig endgültige Formulierung. Sie stammt vom russischen Mathematiker Andrej Kolmogorov.[23]

Bemerkung: Eine Folge $x_1, x_2, ...$ strebt gegen eine Zahl x. Wenn n gegen unendlich geht, ist x der Grenzwert der Folge: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \to n$ für $x \to \infty$.
Bei einer konvergenten Folge gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches N, so dass sich alle darauffolgenden Folgenglieder in einer Epsilonumgebung um x befinden:
$|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Definition: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und X eine Zufallsvariable.

(i) X_n konvergiert gegen X **in Wahrscheinlichkeit** ($X_n \xrightarrow{P} X$), wenn für alle $\varepsilon \geq 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 1$$

[21] Georgii, Hans-Otto (2007): S. 120.

[22] vgl.: Häggström, Olle (2006): Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer-Verlag, Berlin. S. 63.

[23] Häggström, Olle (2006): S. 64.

(ii) X_n konvergiert gegen X **P–fast sicher** ($X_n \xrightarrow{f.s.} X$), wenn gilt:

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

Bemerkung: P–fast sichere Konvergenz impliziert Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, aber nicht umgekehrt.

Satz (schwaches Gesetz der großen Zahlen): *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, die einen Erwartungswert besitzen. Dann gilt:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1)$$

(ohne Beweis)

> *Mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen ist man noch nicht ganz zufrieden. Wenn man zum Beispiel eine faire Münze 100-mal wirft, kann es mit geringer Wahrscheinlichkeit vorkommen, dass die relative Häufigkeit stark von $\frac{1}{2}$ abweicht, aber diese Abweichung sollte nach und nach verschwinden, wenn man lange genug weiter wirft. Dieser Intuition liegt ein anderer Konvergenzbegriff zugrunde.*[24]

Satz (Starkes Gesetz der großen Zahlen): *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, die einen Erwartungswert besitzen. Dann gilt:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}(X_1)$$

(ohne Beweis)

> *Es sei aber noch erwähnt, daß - wie zu erwarten - aus der Gültigkeit des schwachen Gesetzes der großen Zahlen im Allgemeinen nicht auf die des starken Gesetzes geschlossen werden kann.*[25]

[24] Georgii, Hans-Otto (2007): S. 129.

[25] Bauer, Heinz (1991): Wahrscheinlichkeitstheorie. Walter de Gruyter, Berlin. S. 72.

Dieses Gesetz soll nun am Beispiel des Münzwurfes genauer betrachtet werden. Wenn eine Münze unendlich oft geworfen wird, beträgt der Erwartungswert Kopf zu werfen genau 0,5. Dies kann dadurch begründet werden, dass die Wahrscheinlichkeit irgendwann Kopf zu werfen bei einer unendlichen Versuchsreihe 100 Prozent beträgt. Auch wenn sehr oft hintereinander Zahl geworfen wird, wird man mit 100 prozentiger Sicherheit[26] früher oder später einmal Kopf erhalten.

Dies darf jedoch nicht missverstanden werden. Nur weil eine Münze bereits einige Male hintereinander auf Zahl gefallen ist, heißt das nicht, dass sich die Wahrscheinlichkeit bei einem Münzwurf Kopf zu erhalten, vergrößert. Eine Münze hat kein Gedächtnis. Trotzdem ist es wahrscheinlicher, dass sich ein zu großer Mittelwert in den nächsten Versuchen verringert, als dass er sich vergrößert.

Beispiel[27]: Der Mittelwert beträgt 0,55, das heißt zu 55 Prozent wird beim Wurf einer Münze Zahl geworfen. Damit dieser sich in der nächsten Versuchsreihe verringert, muss allerdings nicht unbedingt öfter Kopf geworfen werden als Zahl. Angenommen es wurde in den ersten 100 Versuchen 55 Mal Zahl geworfen: $M_{100} = \frac{55}{100} = 0,55$. Wie oft darf nun bei den nächsten 100 Würfen Zahl auftauchen, damit sich der Erwartungswert trotzdem verringert?

$$M_{200} = \frac{55 + x}{200} = 0,54 \Rightarrow x = 53$$

Es könnte also sogar 53–mal Zahl und nur 47–mal Kopf geworfen werden und der Mittelwert würde sich trotzdem verringern.

[26] 100 prozentige Sicherheit ist im Sinn der Wahrscheinlichkeitstheorie (also mit Wahrscheinlichkeit 1) gemeint, entspricht also nicht der umgangssprachlichen Bedeutung.

[27] vgl.:Häggström, Olle (2006): S. 67f.

Kapitel 3

Das Pokerspiel

Die Spielkarten wurden von den Chinesen erfunden. Man vermutet, dass damals bereits Glücksspiele gespielt wurden, Pokern war aber wahrscheinlich noch nicht bekannt. Auch die Ägypter stellten wenig später Karten aus Elfenbein her. Diese sahen den chinesischen Spielkarten nur bedingt ähnlich. Von dort gelangten sie um 1360 nach Europa. Auch zu diesem Zeitpunkt wurden die Karten noch für andere Spiele verwendet, das Pokerspiel war vermutlich noch nicht bekannt.[1]

Erst im 17. und 18. Jahrhundert begann man in Deutschland zu „pochen". Dieses Spiel ist für das Pokerspiel namensgebend, denn pochen oder schlagen kann im Englischen mit „to poke" übersetzt werden. Etwas später wurde es in Frankreich bekannt, von wo es schließlich nach New Orleans/Louisiana gebracht wurde. Mit Hilfe der Mississippi-Dampfer, auf denen bevorzugt Glücksspiele gespielt wurden, konnte sich das Pokerspiel zu Beginn des 19. Jahrhunderts in ganz Amerika verbreiten. Jonathan H. Green war der erste, der dieses Spiel namentlich als Poker betitelte, als er es in seinem Buch als „Cheating Game" verurteilte.[2]

Während des amerikanischen Bürgerkrieges 1861–1865 wurde Poker zum beliebtesten Spiel im sogenannten „Wilden Westen". Nahezu jeder Saloon besaß damals einen Pokertisch. Besonders beliebt waren die beiden Varianten Draw Poker und Stud Poker. Zu dieser Zeit wurde auch erstmals mit dem englischen Kartendeck zu 52 Karten gespielt. Davor beinhaltete ein Pokerdeck nur: Ass,

[1] vgl.: Meinert, Jan (2007): Die Pokerschule. Texas Hold'em Poker für Anfänger und Fortgeschrittene. Knaur Taschenbuch Verlag, München. S. 17.

[2] vgl.: Meinert, Jan (2007): S. 17.

König, Dame, Bube, Zehn. Somit konnten neue Kombinationen hinzugefügt werden, der Flush und das Straight.[3]

Erst 1919 wurde erstmals ein Pokerspiel gespielt, das eine Gemeinschaftskarte, also eine Karte, die jeder Spieler sehen und zur Vervollständigung seines Blattes verwenden kann, beinhaltete. Dieses Spiel nannte sich „Wild-Widow". Den Regeln zufolge wurde, bevor jeder seine fünfte Karte ausgeteilt bekam, eine Karte offen und für jeden Spieler sichtbar auf den Tisch gelegt. Bald darauf entstanden auch die heute beliebten Pokervarianten Texas Hold'em und Omaha Hold'em.[4]

Poker begeisterte immer mehr Strategiespieler. 1970 fand zum ersten Mal in der Geschichte die World Series of Poker (WSOP), der größte und bekannteste Pokerwettkampf der Welt, statt. Damit wurde Poker zu einem Wettkampfspiel und der Pokerboom war nicht mehr aufzuhalten. Ende der 1990er Jahre begann sich das Spiel auch im Internet zu verbreiten. Man konnte nun zu Hause vor dem Computer gegen andere Spieler antreten. Die Möglichkeit zu jeder beliebigen Zeit online Poker zu spielen, erhöhte das Suchtrisiko um ein Vielfaches. Zahlreiche Menschen verdienen sich ihren Lebensunterhalt ausschließlich mit diesen Online–Spielen, viele haben sich aber auch in den Ruin getrieben. Seit Anfang 2000 wurden Pokerwettkämpfe auch über das Fernsehen übertragen. Die neue „Hole–Card–Cam", eine kleine in den Pokertisch integrierte Kamera, ermöglichte es dem Zuseher zu Hause, die Karten aller Mitspieler zu sehen.[5]

3.1 Die Pokerkarten

Pokern wird mit anglo-amerikanischen Karten zu 52 Blatt gespielt. Diese unterscheiden sich von französischen Karten dadurch, dass die Abkürzungen für die Dame Q (Queen) und für den Buben J (Jack) lauten. Das Ass kann bei den meisten Pokervarianten sowohl den Wert 1, als auch den höchsten Wert (13) annehmen. Jeder Wert existiert in vier Farben: $\spadesuit$ (Pik), $\heartsuit$ (Herz), $\diamondsuit$ (Karo) oder $\clubsuit$ (Kreuz bzw. Treff). Diese Farben sind nur bei der Bildung eines Flushs von Bedeutung. Allerdings ist keine der Farben mehr wert als eine andere.

[3] vgl.: Pokern.com (2008) : Der Ursprung des Pokerspiels. `http://www.pokern.com/pokerschule/allgemeine-poker-strategien/die-geschichte-des-poker.html`, (20.02.2011).

[4] vgl.: Balmer, Frank (2010): Poker Geschichte. `http://www.poker-tipps-und-tricks.com/allgemein/poker-geschichte`, (20.02.2011).

[5] vgl.: Meinert, Jan (2007): S. 18f.

Beim Pokerspiel gilt es mit fünf Karten eine möglichst gute Kombination zu bilden. Die Rangfolge dieser Kartenkombinationen werden in der nachfolgenden Tabelle der Reihe nach, beginnend beim besten Blatt, angeführt. Außerdem finden sich dort die Abkürzungen für die einzelnen Karten, die im Laufe dieser Arbeit verwendet werden sollen.

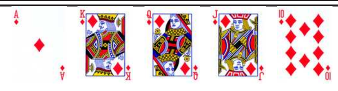
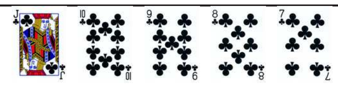
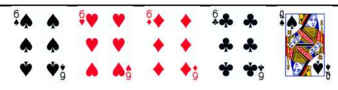
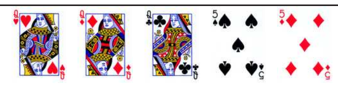
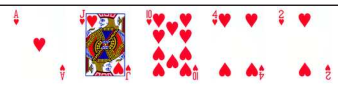
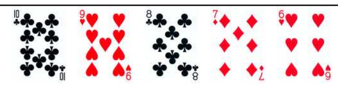
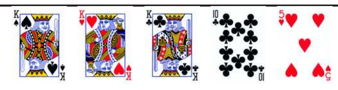
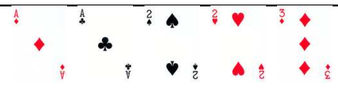
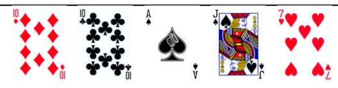
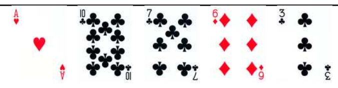
Bezeichnung	Beispiel	Abkürzung
Royal Flush		$\{A\diamondsuit, K\diamondsuit, Q\diamondsuit, J\diamondsuit, T\diamondsuit\}$
Straight Flush		$\{J\clubsuit, T\clubsuit, 9\clubsuit, 8\clubsuit, 7\clubsuit\}$
Four of a Kind		$\{6\spadesuit, 6\heartsuit, 6\diamondsuit, 6\clubsuit, Q\spadesuit\}$
Full House		$\{Q\heartsuit, Q\diamondsuit, Q\clubsuit, 5\spadesuit, 5\diamondsuit\}$
Flush		$\{A\heartsuit, J\heartsuit, T\heartsuit, 4\heartsuit, 2\heartsuit\}$
Straight		$\{T\clubsuit, 9\heartsuit, 8\clubsuit, 7\diamondsuit, 6\heartsuit\}$
Three of a Kind		$\{K\spadesuit, K\heartsuit, K\clubsuit, T\clubsuit, 5\heartsuit\}$
Two Pair		$\{A\diamondsuit, A\clubsuit, 2\spadesuit, 2\heartsuit, 3\diamondsuit\}$
Pair		$\{T\diamondsuit, T\clubsuit, A\spadesuit, J\spadesuit, 7\heartsuit\}$
High Card		$\{A\heartsuit, T\clubsuit, 7\clubsuit, 6\diamondsuit, 3\clubsuit\}$

Abb. 2

3.2 Der Dealer

Der Dealer ist nicht nur dafür zuständig die Karten zu mischen und auszuteilen, er regelt außerdem die Pokerrunde.

In Casinos oder bei Pokerturnieren übernimmt diese Aufgaben meist ein Angestellter, der Dealer oder Croupier genannt wird.
Sofern keine Mischmaschine vorhanden ist, hat der Dealer die Karten ordentlich zu mischen. Dazu werden zuerst alle Karten mit der Bildseite nach unten auf dem Tisch ausgebreitet und in kreisförmigen Bewegungen durchgewühlt. Anschließend werden die Karten wieder zu einem Stapel geformt. Danach wird der Stapel geteilt und mit Hilfe der Riffle–Shuffle–Methode gemischt. Dabei hält jede Hand einen Stapel mit den Bildflächen nach unten fest und biegt ihn mit dem Daumen nach innen. Die Karten werden im Anschluss eine nach der anderen losgelassen, so dass sich die beiden Stapel wie ein Reißverschluss ineinander verzahnen. Man schiebt die Karten zusammen und der Vorgang wird weitere ein oder zwei Mal wiederholt. Anschließend hebt der Dealer einen Teil des Kartenstapels auf und legt ihn unter den restlichen Stapel. Zum Schluss wird meist ein weiteres Mal die Riffle–Shuffle–Methode angewandt.
Anschließend hat der Dealer die Aufgabe die Karten auszuteilen. Er gibt jedem Spieler zunächst eine Karte. Erst wenn jeder Spieler eine Karte in der Hand hat, wird die zweite Karte ausgeteilt. Falls es Community–Cards, die alle Spieler sehen und zum Vervollständigen ihres Blattes nutzen können, gibt, hat der Dealer eine Karte des Stapels beiseite zu legen bevor er diese Karten auf den Tisch legt.
Auch während einer Runde hat der Dealer einige Aufgaben zu erledigen. Er muss dafür sorgen, dass alle Spieler rechtzeitig ihre Einsätze machen, verwaltet den Pot und ermittelt, nachdem alle im Spiel verbliebenen Spieler ihre Karten aufgedeckt haben (Showdown), den Gewinner. Außerdem hat er die Funktion des Schiedsrichters, falls es zu Meinungsverschiedenheiten oder Streitereien unter den Spielern kommt.

Bei Pokerspielen im privaten Kreis spielt der Dealer meist selbst mit. Um das Spiel trotzdem fair zu halten, wird jede Runde ein neuer Spieler zum Dealer ernannt. Für die erste Runde wird der Dealer ausgelost. Dafür können verschiedene Verfahren angewandt werden, zum Beispiel könnte jeder Spieler eine Karte aus dem Kartenstapel abheben, wobei die höchste Karte gewinnt. Der Spieler mit dieser Karte übernimmt für die erste Runde die Aufgaben des Dealers. Wenn vorhanden, erhält dieser zur besseren Kennzeichnung einen Dealerbutton. Nach jeder Runde wandert dieser im Uhrzeigersinn um eine Position weiter. Somit hat der nächste Spieler für die kommende Runde die Aufgaben des Dealers übernommen.

Im Internet ist es nicht sinnvoll einen Spieler zum Dealer zu ernennen. Denn während eines Online Poker Spiels kann ein Spieler jederzeit den Pokertisch verlassen und bei einem anderen einsteigen. Dies ist auch das Konzept der Cash Games, auf die später noch genauer eingegangen wird. Deshalb ist virtuelles Poker weitaus dynamischer als das reale Pokerspiel. Die Aufgaben des Dealers übernimmt ein Zufallsgenerator, mit dessen Hilfe alle Karten verteilt werden. Ein Spieler hat nur einige Sekunden Zeit um zu handeln, wenn er an der Reihe ist. Falls er die Zeit übersieht, ist er automatisch aus dem Spiel ausgeschieden.

3.3 Die Pokerchips

Beim Pokern wird selten mit richtigem Geld gespielt. Meist wird ein gewünschter Betrag gegen Spielgeld eingetauscht, die sogenannten Chips. Diese Chips sind meist rund und haben je nach ihrem Wert unterschiedliche Farben.

Bevor die Karten ausgeteilt werden, müssen oft Zwangseinsätze, sogenannte Antes oder Blinds erbracht werden. Ein Ante ist ein Grundeinsatz, den jeder Spieler vor Spielbeginn einzahlen muss. Dieser kommt bei Draw Poker Varianten gerne zum Einsatz um sicher zu stellen, dass das Spiel in Schwung kommt. Blinds hingegen müssen nur von zwei Spielern erbracht werden. Der Spieler direkt links neben dem Dealer wird als Small Blind bezeichnet, der links von diesem als Big Blind. Die Höhe der Blinds wird stets vor dem Spiel festgelegt. Der Big Blind hat meist den doppelten Wert des Small Blinds. Beim Online Poker wird oft mit Blinds zu 10/20 oder 25/50 Dollar gespielt. Bei vielen Turnieren ist es üblich, die Blinds nach einer gewissen Zeit zu erhöhen, meist sogar zu verdoppeln. Man will dadurch vermeiden, dass das Pokerspiel zu lange dauert, da man bei einem Turnier nicht den Tisch wechseln darf, wie es beim Online Poker oder beim Cash Game der Fall ist. Der Big Blind ist zugleich der Mindesteinsatz für jeden Spieler, der sich entschließt zu wetten.
Grundsätzlich wird zwischen Fixed Limit und No Limit Poker unterschieden. Im Gegensatz zum Fixed Limit, bei dem nur das Setzen eines bestimmten Höchstbetrages erlaubt ist, gibt es beim No Limit Poker keine Obergrenze des Einsatzes. Texas Hold'em wird meist ohne Limit (No Limit) gespielt. Ein Spieler kann aber höchstens so viele Chips setzen, wie er noch besitzt. Möchte ein Spieler alle seine Chips (Stack) setzen, wird dieser Einsatz All–In genannt.

3.4 Turnier/Cash Game

Bei Turnieren hat jeder Spieler denselben Betrag als Buy–In zu zahlen und bekommt dafür eine gewisse Anzahl an Chips. Der Wert der Chips muss nicht mit dem zu zahlenden Geldbetrag übereinstimmen. Während des Spiels ist es nicht erlaubt, das Spiel zu verlassen und die übrig gebliebenen Chips einzutauschen. Wenn ein Spieler seinen gesamten Stack verspielt hat, ist das Spiel für ihn beendet. Er darf sich keine neuen Chips kaufen um wieder einzusteigen. So muss ein Spieler nach dem anderen das Spiel verlassen, bis schließlich nur noch ein Spieler übrig bleibt. Dieser ist der Gewinner des Turniers. Aber auch er darf seine Chips nicht in Geld eintauschen. Der Gewinn wird vor dem Spiel festgelegt und meist unter den drei Bestplatzierten so aufgeteilt, dass der Sieger die größte und der Drittplatzierte die niedrigste Summe erhält.

Bei einem Cash Game wird der Wert des eingebrachten Geldes eines Spielers in Chips umgewechselt. Jeder darf einen beliebig großen Betrag eintauschen. Meist gibt es verschiedene Tische auf denen gepokert wird. Jedem Spieler steht es frei, jederzeit einen Tisch zu verlassen und sich zu einem anderen Tisch zu setzen (sofern noch ein Platz frei ist). Bei Cash Games dürfen die Blinds nicht erhöht werden, damit sich die Spielsituation nicht verändert und jeder stets die gleichen Chancen besitzt.

Kapitel 4

Draw Poker

Draw Poker ist der Überbegriff zahlreicher Pokervarianten, wie zum Beispiel Five Card Draw und Triple Draw, auf die im Folgenden näher eingegangen werden soll. Gespielt wird beim Draw Poker mit französischen oder angloamerikanischen Karten zu 52 Blatt, üblicherweise ohne Joker. Jeder Spieler erhält gleich viele Karten, wobei die Anzahl von der jeweiligen Pokervariante abhängt. Zumeist wird mit fünf Stück gespielt. Das Spiel besteht aus mehreren Wettrunden. Nach jeder besteht die Möglichkeit unerwünschte Karten beim Dealer auszutauschen. Wie viele Wettrunden und Tauschvorgänge gespielt werden, hängt von der jeweiligen Pokervariante ab. Auch die Anzahl der Karten, die getauscht werden dürfen, ist variabel. Alle Spieler, die nach der letzten Wettrunde noch im Spiel sind, liefern sich einen Showdown. Jener mit den besten Karten gewinnt den Pot mit den gesetzten Chips.

4.1 Five Card Draw

Five Card Draw wurde in der Pionierzeit des 19. Jahrhunderts im Westen der heutigen USA, im sogenannten Wilden Westen, bevorzugt gespielt und ist die älteste Variante des Draw Poker. Zahlreiche Western–Filme beinhalten Szenen, in denen die Protagonisten bei diesem Pokerspiel gezeigt werden. Nicht zuletzt deshalb war Five Card Draw lange Zeit die beliebteste Pokervariante, die gerne auch im privaten Kreis mit Freunden gespielt wurde. Mittlerweile wurde es aber von Texas Hold'em, auf das später noch genauer eingegangen werden soll, abgelöst.

4.1.1 Die Regeln

Zu Beginn des Spiels wird unter allen Spielern ein Dealer ausgelost, der in der ersten Runde für das Austeilen der Karten zuständig ist. Zur besseren Kennzeichnung erhält er einen Dealerbutton. Dieser wandert nach jeder Runde im Uhrzeigersinn um eine Position weiter. Noch bevor die Karten ausgegeben werden, muss jeder ein Ante in den Pot einzahlen. Anschließend teilt der Dealer allen Spielern je fünf Karten einzeln und verdeckt aus.

Nun beginnt die erste Wettrunde, die der Spieler links vom Dealer eröffnet. Ihm stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung: schieben (check) oder wetten (bet). Wenn er schiebt, ist der nächste Spieler an der Reihe, dem seinerseits wieder diese beiden Möglichkeiten offen stehen. Wenn er sich aber entscheidet zu wetten, hat der darauffolgende Spieler die Wahl mitzugehen (call), zu passen (fold) oder zu erhöhen (raise). Auf diese Weise wird im Uhrzeigersinn weitergespielt. Für den Fall, dass alle Spieler bis auf einen ausgestiegen sind, gewinnt dieser den gesamten Pot und die Runde ist zu Ende. Ansonsten wird das Spiel nach denselben Regeln fortgesetzt, bis kein Spieler mehr erhöhen will. Es ist nun aber jenem Spieler, der den letzten Einsatz erbracht hat, nicht erlaubt ein weiteres Mal zu erhöhen.

Man kann Five Card Draw auch mit einer zusätzlichen Sonderregel spielen, bei der ein Spieler nur dann wetten darf, wenn er ein Paar Buben oder etwas Besseres in der Hand hält. Ist das nicht der Fall, muss er abwarten. Falls kein Spieler ein solches Blatt besitzt, ist die Runde zu Ende. Die Karten werden gemischt und neu verteilt. Die Chips vom Ante bleiben aber im Pot, der bei dieser Spielvariante den treffenden Namen Jackpot[1] erhält. Dieses Wort hat, wie auch viele andere Pokerbegriffe, den Weg in den alltäglichen Sprachgebrauch gefunden.

Nach dieser ersten Wettrunde können nun, beginnend beim Spieler links vom Dealer, Karten ausgetauscht werden. Üblicherweise dürfen alle fünf ersetzt werden, es gibt aber auch Varianten bei denen nur vier oder noch weniger Karten ausgewechselt werden dürfen. Es steht aber natürlich jedem Spieler frei alle Karten zu behalten. Nun beginnt die zweite und letzte Wettrunde. Sie folgt dem gleichen Prinzip wie die erste.

Falls nach dieser Wettrunde nur noch ein Spieler übrig ist, erhält dieser den gesamten Pot und das Spiel ist beendet. Ansonsten kommt es zum Showdown. Alle verbliebenen Spieler müssen nun ihre Karten offen zeigen, beginnend bei demjenigen, der zuletzt erhöht hat.

[1] Jack ist der englische Begriff für jene Spielkarte, die im deutschen Bube genannt wird.

Falls in dieser Runde nichts gesetzt wurde, hat der Spieler links von Dealer seine Karten zuerst aufzudecken. Die beste Hand gewinnt den gesamten Pot. Falls zwei oder mehr Spieler ein gleichwertiges Blatt besitzen, wird der Pot zu gleichen Teilen aufgeteilt.

4.1.2 Die Chancen auf ein gutes Blatt

Bei Five Card Draw teilt der Dealer üblicherweise jedem Spieler immer nur eine Karte aus, bis jeder Spieler fünf Karten in den Händen hält. Man will dadurch vermeiden, dass die Spieler bei schlecht gemischten Karten wieder dasselbe Blatt wie in der Vorrunde bekommen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird allerdings von rein zufällig angeordneten Karten ausgegangen. In diesem Fall ist es unerheblich, ob alle Karten auf einmal oder in fünf Raten ausgegeben werden. Das sukzessive Austeilen muss also in der Rechnung nicht berücksichtigt werden. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Pokerkombination auch von der Spieleranzahl unabhängig.

Allerdings ist anzumerken, dass bei den folgenden Beispielen noch keine Karten getauscht wurden. Es ist, wie oben bereits erwähnt, bei Five Card Draw erlaubt, nach der ersten Wettrunde beliebig viele Karten beim Dealer auszuwechseln. Hier werden aber zunächst nur die Wahrscheinlichkeiten berechnet, ein bestimmtes Blatt gleich nach dem ersten Austeilen in den Händen zu halten. Man kann den Tausch nicht berücksichtigen, weil dieser nicht rein vom Zufall abhängig ist. Auch wenn davon ausgegangen wird, dass die Karten wahllos angeordnet sind, kann der Spieler selbst entscheiden wie viele Karten er tauschen will. Somit ist der Spieler zum Teil dafür verantwortlich einen guten Tausch zu machen oder nicht. Auf die Frage, welche und wie viele Karten man bei einzelnen Startblättern auswechseln soll, damit die Wahrscheinlichkeit für ein gutes Blatt maximal wird, soll später noch genauer eingegangen werden.

Von Royal Flush bis High Card

Royal Flush:

Bei Five Card Draw wird mit 52 Karten gespielt, aus denen fünf gezogen werden. Die Reihenfolge der Karten spielt keine Rolle und eine gezogene Karte kann nicht ein zweites Mal ausgeteilt werden. Es handelt sich demnach um eine Kombination ohne Wiederholung, welche sich mit $\binom{n}{k}$ berechnen lässt.

Es gibt vier Möglichkeiten einen Royal Flush zu bekommen (entweder in der Farbe $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$ oder $\clubsuit$).
Mit Hilfe der Laplace-Formel erhält man:

$$P(\text{Royal Flush}) = \frac{4}{\binom{52}{5}} \approx 0,00000154$$

Straight Flush:

Es ergeben sich neun günstige Möglichkeiten für einen Straight Flush:
$\{A, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\{6, 7, 8, 9, T\}$, $\{7, 8, 9, T, J\}$, $\{8, 9, T, J, Q\}$, $\{9, T, J, Q, K\}$.
Alle fünf Karten müssen wie beim Royal Flush, die gleiche Farbe haben. Demnach gibt es vier Möglichkeiten für die Farbauswahl. Da diese beiden Ereignisse unabhängig voneinander sind, darf man sie miteinander multiplizieren.
Es werden natürlich immer noch fünf Karten aus insgesamt 52 gezogen. Man kommt also zu folgender Rechnung:

$$P(\text{Straight Flush}) = \frac{9 \cdot 4}{\binom{52}{5}} \approx 0,00001385$$

Four of a Kind:

Pokerkarten beinhalten insgesamt 13 verschiedene Werte, demnach gibt es 13 Möglichkeiten vier gleiche Karten zu ziehen. Weiters muss genau eine Karte einen anderen Wert besitzen, also aus den 48 verbliebenen Karten stammen.
Insgesamt ergibt sich Folgendes:

$$P(\text{Four of a Kind}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} \approx 0,0002401$$

Full House:

Für den Drilling stehen 13 Werte zur Verfügung. Jeder Wert existiert in vier verschiedenen Farben, aus denen drei für den Drilling gezogen werden. Demnach wird aus einer 4–elementigen Menge eine Stichprobe vom Umfang 3 entnommen.

Die beiden Karten des Paares können nur noch einen von 12 Werten annehmen und in zwei der vier möglichen Farben gezogen werden.
Somit erhält man:

$$P(\text{Full House}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0,00144058$$

Flush:

Insgesamt gibt es vier verschiedene Farben, in denen ein Flush gezogen werden kann. Es gibt 13 verschiedene Werte in jeder Farbe, von denen fünf gezogen werden. Es darf aber nicht möglich sein, aus diesen Karten eine Straße zu bilden. Demnach muss die Anzahl der potentiellen Straight Flushs und Royal Flushs abgezogen werden. Laut der obigen Überlegung gibt es vier Möglichkeiten für einen Royal Flush und 36 Möglichkeiten für einen Straight Flush, also insgesamt 40 Möglichkeiten.
Daher lautet die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Flush}) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5} - 40}{\binom{52}{5}} \approx 0,0019654$$

Straight:

Es existieren zehn verschiedene Arten ein Straight anzuordnen. Das niedrigste Straight besteht aus den Karten $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ und das höchste aus $\{T, J, Q, K, A\}$. Also muss die niedrigste Karte aus der 10–elementigen Menge $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T\}$ stammen.
Diese fünf Karten dürfen allerdings nicht alle die gleiche Farbe besitzen, denn sonst hätte der Spieler einen Royal Flush oder einen Straight Flush in der Hand. Bei der Anordnung von fünf Karten in vier Farben handelt es sich um eine Variation mit Wiederholung, da die Reihenfolge der Farbzusammenstellung von Bedeutung ist und eine Farbe mehrmals angenommen werden kann. Eine Variation mit Wiederholung wird mit n^k berechnet. Von den insgesamt 4^5 Möglichkeiten fünf Karten in vier Farben anzuordnen, müssen demnach vier, jene in welchen alle Karten dieselbe Farbe besitzen, abgezogen werden.
Dies führt zu:

$$P(\text{Straight}) = \frac{10 \cdot (4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx 0,00392465$$

Three of a Kind:

Die Anzahl der Möglichkeiten einen Drilling zu ziehen wurde bereits im Beispiel Full House berechnet, sie lautet 52. Die restlichen zwei Karten müssen allerdings sowohl vom Wert des Drillings, als auch voneinander, verschieden sein. Das bedeutet, dass aus den verbliebenen 12 Werten zwei gezogen werden. Diese beiden Karten können jede beliebige Farbe annehmen. Es handelt sich wieder um eine Variation mit Wiederholung. Aus diesem Grund gibt es 4^2 Möglichkeiten diese zwei Karten in vier Farben anzuordnen.
Somit erhält man:

$$P(\text{Three of a Kind}) = \frac{52 \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2}{\binom{52}{5}} \approx 0,02112845$$

Two Pair:

Zunächst sollen die Werte für die beiden Paare ausgewählt werden. Aus insgesamt 13 möglichen Werten werden demnach zwei gezogen. Jedes dieser beiden Paare kann zwei der vier möglichen Farben annehmen.
Die fünfte Karte muss einen von den beiden Paaren verschiedenen Wert besitzen. Insgesamt stehen noch elf Werte zur Verfügung. Diese Karte kann jede beliebige Farbe annehmen.
Es folgt also:

$$P(\text{Two Pair}) = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4}{\binom{52}{5}} \approx 0,04753902$$

Pair:

Es stehen 13 Werte für das Paar zur Verfügung. Die Farben dieser beiden Karten kann aus den vier möglichen Farben gewählt werden. Die restlichen drei Karten müssen aber einen unterschiedlichen Wert besitzen. Demnach werden drei Elemente aus einer 12–elementigen Menge gezogen. Diese drei Karten können jede beliebige Farbe annehmen. Es gibt also 4^3 Anordnungsmöglichkeiten.

Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Pair}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{52}{5}} \approx 0,42256903$$

High Card:

Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass sich aus den fünf Karten keine der oben angeführten Kombinationen anordnen lässt. Es handelt sich um die Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass sich irgendeine Kombination aus den Karten bilden lässt. Es werden also alle obigen Wahrscheinlichkeiten von 1 abgezogen.
Somit erhält man:

$$\begin{gathered} P(\text{High Card}) = 1 - (P(\text{Royal Flush}) + P(\text{Straight Flush}) + \\ + P(\text{Four of a Kind}) + P(\text{Full House}) + P(\text{Flush}) + P(\text{Straight}) + \\ P(\text{Three of a Kind}) + P(\text{Two Pair}) + P(\text{Pair})) \approx \\ \approx 1 - (0,00000154 + 0,00001385 + 0,0002401 + \\ +0,00144058 + 0,0019654 + 0,00392465 + \\ +0,02112845 + 0,04753902 + 0,42256903) \\ \approx 0,5011774 \end{gathered}$$

Tabelle: Five Card Draw

Um eine bessere Übersicht über die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Blätter in Five Card Draw zu erhalten, werden sie hier in einer Tabelle aufgelistet.

Kombination	Wahrscheinlichkeit
Royal Flush	0,00000154
Straight Flush	0,00001385
Four of a Kind	0,00024010
Full House	0,00144058
Flush	0,00196540
Straight	0,00392465
Three of a Kind	0,02112845
Two Pair	0,04753902
Pair	0,42256903
High Card	0,50117740

4.2 Triple Draw

Das Spiel Triple Draw gehört auch zur Draw–Poker–Familie, wird aber nach anderen Regeln gespielt. Bei diesem Spiel geht es darum ein möglichst schlechtes Blatt in den Händen zu halten. Diese Pokervariante nennt sich Lowball.

4.2.1 Die Regeln

Die Regeln des Triple Draw sind denen von Five Card Draw sehr ähnlich. Ein Unterschied besteht darin, dass es nicht nur eine Tauschrunde gibt, sondern drei. Somit gibt es vier Wettrunden, bevor es zum Showdown kommt. Triple Draw kennt zwei verschiedene Varianten: A–5 Triple Draw und 2–7 Triple Draw. Das Besondere bei diesen Pokerspielen ist, dass beide nach den Lowball Regeln gespielt werden, bei denen das schlechteste Blatt gewinnt.

Bei A–5 (Ace to Five) Triple Draw hat das Ass immer den Wert 1 und Flushs und Straights zählen nicht. Die schlechtest mögliche Kartenkombination ist $\{A, 2, 3, 4, 5\}$.

Im Gegensatz dazu zählt bei 2–7 (Deuce to Seven) Triple Draw sowohl der Flush, als auch das Straight und das Ass nimmt stets den höchsten Wert an. Die schlechteste Hand, die man in diesem Spiel erhalten kann, ist $\{2, 3, 4, 5, 7\}$.

4.2.2 Die Chancen auf ein schlechtes Blatt

Das Ziel des Spielers bei Triple Draw ist es, möglichst niedrige Karten in der Hand zu halten, mit denen es nicht möglich ist, ein Paar oder etwas besseres zu bilden.

2-7 Triple Draw:

Da bei dieser Variante Straights und Flushs zählen und das Ass immer den höchsten Wert hat, ist das schlechteste Blatt $\{2, 3, 4, 5, 7\}$, gefolgt von $\{2, 3, 4, 6, 7\}$, $\{2, 3, 5, 6, 7\}$ und $\{2, 4, 5, 6, 7\}$. Diese Vierergruppe nennt man Seven–Low. Die Karten dürfen allerdings nicht dieselbe Farbe haben. Das Blatt $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, das eigentlich die niedrigsten Karten beinhalten würde, zählt als Straight und lässt sich deshalb nicht in die Liste der schlechten Kartenblätter einordnen. Allerdings stellt das Blatt $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ keine Straße dar, da das Ass nicht den Wert 1 annehmen darf. Es ist also zu den schlechten Blättern zu zählen.

Es folgen jene Kartenkombinationen, deren höchste Karte eine 8 ist. Diese werden Eight–Low genannt. Das nächstbeste Blatt besteht demnach aus den Werten $\{2, 3, 4, 5, 8\}$. Die Reihenfolge kann auf dieselbe Weise wie die Seven–Low Blätter fortgesetzt werden. Die Eight–Low Blätter bestehen aber aus mehr Kartenkombinationen als die Seven–Low Blätter.

Eight–Low Kartenzusammenstellungen

Da eine der insgesamt fünf Karten eine 8 sein soll, bleiben noch vier freie Plätze für sechs verschiedene Kartenwerte $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Es handelt sich hierbei um eine Kombination ohne Zurücklegen, da die Reihenfolge der Karten nicht von Bedeutung ist. Weiters muss ein Blatt, das Straight $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, abgezogen werden.
Somit ergibt sich für die Anzahl der Eight–Low Blätter: $\binom{6}{4} - 1 = 14$.
Es gibt also 14 verschiedene Eight–Low Kartenzusammenstellungen.

Die Liste der Lowball–Blätter ließe sich mit den Nine–Low und Ten–Low Karten fortführen. Die Regeln bleiben aber immer die gleichen.
Die besten Voraussetzungen hat ein Spieler, dessen Karten keine der guten Kombinationen ergeben. Alle fünf Karten müssen demnach verschiedene Werte haben. Außerdem dürfen sie kein Straight und keinen Flush bilden.

Keine Kombination

Alle fünf Kartenwerte müssen verschieden sein. Demnach wird eine 5–elementige Stichprobe aus einer 13–elementigen Menge entnommen. Damit diese Karten aber kein Straight bilden, müssen neun Möglichkeiten davon abgezogen werden ($\{A, 2, 3, 4, 5\}$ zählt nicht als Straight). Jede der fünf Karten kann jede beliebige Farbe annehmen, jedoch müssen die vier Möglichkeiten, dass alle gleicher Farbe sind, abgezogen werden. Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten muss noch durch alle Möglichkeiten fünf Karten aus 52 zu ziehen dividiert werden. Natürlich wurde auch hier die Möglichkeit Karten auszutauschen nicht beachtet.
Insgesamt erhält man:

$$P(\text{Keine Kombination}) = \frac{\left(\binom{13}{5} - 9\right) \cdot (4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx 0.50156986$$

A–5 **Triple Draw**

Die beste Hand bei A–5 Triple Draw wird „The Wheel“ genannt. Da Flushs und Straights nicht zählen und Ass immer den Wert 1 besitzt, besteht diese aus den Werten $\{A, 2, 3, 4, 5\}$. Dieses Blatt wird auch Five–Low genannt. Die nächstbeste Kartengruppe nennt sich Six–Low. Hierbei ist der höchste Wert, der von einer der fünf Karten angenommen wird, eine 6. Die Rangfolge kann dementsprechend mit Seven–Low, Eight–Low und Nine–Low fortgeführt werden.

The Wheel/5–Low

Jede Kombination aus fünf verschiedenen Werten hat dieselbe Wahrscheinlichkeit. Somit steht diese Rechnung exemplarisch für jede mögliche Kartenkombination, da Flushs und Straights nicht gezählt werden.

Jede Karte kann eine beliebige Farbe annehmen. Es gibt also 4^5 mögliche Farbkombinationen. Insgesamt werden wieder fünf Karten aus 52 gezogen. So erhält man die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{The Wheel}) = \frac{4^5}{\binom{52}{5}} \approx 0,000394$$

6–**Low**

Die beste Kartengruppe nach Five–Low nennt sich Six–Low. Diese besteht aus fünf Kombinationen:
$\{A, 2, 3, 4, 6\}$, $\{A, 2, 3, 5, 6\}$, $\{A, 2, 4, 5, 6\}$, $\{A, 3, 4, 5, 6\}$ und $\{2, 3, 4, 5, 6\}$
Die Wahrscheinlichkeit eines dieser Six–Low Blätter beim ersten Austeilen zu erhalten lautet somit:

$$P(\text{6–Low}) = \frac{5 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} \approx 0.00197002$$

Kapitel 5

Hold'em Poker

Hold'em[1] Poker wird noch nicht so lange gespielt wie Draw Poker, erfreut sich aber gerade in letzter Zeit großer Beliebtheit und hat Draw Poker sowohl bei Turnieren, als auch bei Cash Games längst verdrängt. Bei diesem Spiel wird eine gewisse Anzahl von Community–Cards offen in die Mitte des Tisches gelegt, damit sie von allen Spielern zur Bildung ihrer Hand verwendet werden können. Zusätzlich erhält jeder Spieler verdeckte Hole–Cards. Der Spieler mit der höchsten Kombination aus fünf Karten, die sowohl mit den Hole–Cards, als auch mit den Community–Cards gebildet werden dürfen, hat die Runde gewonnen.

5.1 Texas Hold'em

Texas Hold'em ist die bekannteste Variante der Hold'em Familie. In Casinos ist es das am häufigsten angebotene Pokerspiel und auch im Fernsehen werden immer öfter Texas Hold'em Turniere mit professionellen Pokerspielern übertragen. Sogar bei privaten Pokerrunden zu Hause wurde Five Card Draw bereits von Texas Hold'em verdrängt.

[1] Hold'em ist eine Abkürzung für Hold them.

5.1.1 Die Regeln

Texas Hold'em wird ebenfalls mit französischen oder anglo–amerikanischen Karten zu 52 Blatt, üblicherweise ohne Joker, gespielt. Wenn es keinen Croupier wie im Casino gibt, wird ein Dealer bestimmt, der die Karten mischt und austeilt. Zur besseren Erkennung erhält dieser einen Dealerbutton. Texas Hold'em wird nicht mit Antes, sondern mit Blinds gespielt. Der Spieler links vom Dealer setzt den Small Blind, sein Nachbar den Big Blind. Erst nach diesen Einsätzen werden allen Spielern zwei verdeckte Hole–Cards ausgeteilt.

Nun beginnt die erste Wettrunde, auch Pre–Flop genannt. Der Spieler links neben dem Big Blind beginnt. Jeder Spieler hat nun der Reihe nach die Möglichkeiten zu passen (fold), mitzugehen (call) oder zu erhöhen (raise). Wenn nicht erhöht, sondern nur mitgegangen oder gepasst wird, ist die erste Runde beendet. Zum Schluss muss der Small Blind noch die Differenz auf den Big Blind einzahlen, wenn er weiterspielen will. Jeder Spieler hat die Möglichkeit zu erhöhen. Die Runde endet, wenn alle übrigen Mitspieler bei einem Einsatz mitgegangen sind. Jener Spieler, der die letzte Erhöhung vorgenommen hat, darf nun kein weiteres Mal erhöhen.

Nachdem der Dealer die oberste Karte des Stapels zur Seite gelegt hat, werden drei Karten offen auf den Tisch gelegt. Diese Runde nennt sich Flop. Der Spieler links vom Dealer hat nun die Wahl zu wetten (bet) oder zu schieben (check). Es gibt keine Blinds mehr. Wenn er schiebt, hat der nächste Spieler wieder dieselben zwei Möglichkeiten. Wenn er jedoch wettet, kann der nächste Spieler mitgehen, erhöhen oder passen. Diese Runde geht wieder so lange, bis alle Spieler bei einer Erhöhung mitgegangen sind oder gepasst haben. Manchmal wird die Anzahl der erlaubten Erhöhungen pro Runde eingeschränkt, üblicherweise auf drei. Dadurch will man vermeiden, dass eine Runde zu lange dauert.

Der Dealer gibt die oberste Karte des Stapels wieder beiseite und legt die nächste offene Karte, Turn genannt, zu den anderen auf den Tisch. Nun beginnt die dritte Wettrunde, die analog zur zweiten verläuft.

Nachdem der River, so wird die fünfte und letzte der Community–Cards genannt, ebenfalls offen auf den Tisch gelegt wurde, beginnt die letzte Wettrunde, gefolgt vom Showdown. Beginnend bei jenem Spieler, der als letztes erhöht oder gewettet hat, deckt jeder Spieler im Uhrzeigersinn seine Karten auf. Falls niemand gesetzt hat, muss der Spieler links vom Dealer als erster seine Karten zeigen. Sollten bereits alle Spieler bis auf einen aufgegeben haben gewinnt der letzte verbliebene Spieler den gesamten Pot. Er muss seine Karten nicht den anderen zeigen. Falls aber noch mehrere Spieler im Rennen sind, gilt es herauszufinden, wer die beste Kombination aus fünf Karten bilden kann. Dafür dürfen beliebig viele Hole–Cards und Community–Cards verwendet werden. Es kann auch vorkommen, dass die besten fünf Karten die Community–Cards selbst sind. In diesem Fall wird der Pot unter den noch verbliebenen Spielern aufgeteilt (Split Pot). Andernfalls gewinnt der Spieler mit der besten Hand. Er erhält den gesamten Pot. Falls es zwei oder mehrere Spieler gibt, die eine Kombination von gleichem Wert besitzen, kommt es ebenfalls zum Split Pot.

5.1.2 Die Chancen auf ein gutes Blatt

Bei Texas Hold'em ist es im Gegensatz zu Five Card Draw nicht erlaubt Karten zu tauschen. Dieser Umstand sorgt dafür, dass die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Blätter bei Five Card Draw nicht exakt berechenbar sind. Zumindest nicht, wenn der Tausch berücksichtigt werden soll. Deshalb wurden im vorigen Kapitel nur die Wahrscheinlichkeiten jener Blätter angegeben, die ein Spieler nach dem ersten Austeilen in der Hand hält. Da es nun keine Tauschrunden mehr gibt ist es bei Texas Hold'em möglich, vorauszusagen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Spieler ein bestimmtes Blatt in der Hand hält, nachdem alle Karten ausgeteilt wurden. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass er die Runde zu Ende spielt und nicht aussteigt.

Im Folgenden wird die Wahrscheinlichkeit, die jeweiligen Pokerkombinationen aus fünf Karten unter sieben ausgeteilten vorzufinden, berechnet. Der Frage nach der Wahrscheinlichkeit für ein gutes Blatt während des Spielverlaufs, wenn also noch nicht alle Karten bekannt sind, wird später nachgegangen.

Von Royal Flush bis High Card

Royal Flush:

Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten einen Royal Flush zu ziehen, in den Farben $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$ oder $\clubsuit$. Die übrigen beiden Karten, die aus den 47 verbliebenen genommen werden, können völlig beliebig gewählt werden, da es nicht möglich ist, mit diesen eine bessere Kombination zu erhalten. Es wird also eine 2–elementige ungeordnete Stichprobe aus einer 47–elementigen Menge ohne Zurücklegen entnommen. Insgesamt gibt es 52 Karten, aus denen sieben Stück entnommen werden.

Mit Hilfe der Formel von Laplace erhält man die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Royal Flush}) = \frac{4 \cdot \binom{47}{2}}{\binom{52}{7}} \approx 0,00003232$$

Straight Flush:

Einen Straight Flush gibt es in vier verschiedenen Farben. Man hat außerdem, wie bei Five Card Draw, neun Möglichkeiten ein Straight zu bekommen:
$\{A, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\{6, 7, 8, 9, T\}$, $\{7, 8, 9, T, J\}$, $\{8, 9, T, J, Q\}$ und $\{9, T, J, Q, K\}$.
Das Ass darf nicht als höchste Karte gezogen werden, da die daraus entstehende Straße in die Kategorie Flush fallen würde. Nun muss beachtet werden, dass keine der beiden zusätzlichen Karten das Blatt zu einem höheren Straight macht. Der jeweils nächsthöhere Kartenwert muss also aus den verbliebenen 47 Karten ausgeschlossen werden. Bei der Kombination $\{A, 2, 3, 4, 5\}$, darf demnach keine 6 gezogen werden, denn sonst würde das höhere Straight $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ zählen. Man kann folglich die fehlenden zwei Karten nur aus einer Menge von 46 ziehen. Es ergibt sich:

$$P(\text{Straight Flush}) = \frac{4 \cdot 9 \cdot \binom{46}{2}}{\binom{52}{7}} \approx 0,00027851$$

Four of a Kind:

Es stehen 13 verschiedene Werte für einen Poker zur Verfügung. Es gibt keine Möglichkeit mit den übrigen drei Karten ein besseres Blatt zu erhalten, da es nicht möglich ist mit sieben Karten von denen vier den gleichen Wert besitzen eine Straße zu bilden. Somit wird eine 3–elementige ungeordnete Stichprobe aus einer 48–elementigen Menge gezogen. Insgesamt erhält man:

$$P(\text{Four of a Kind}) = \frac{13 \cdot \binom{48}{3}}{\binom{52}{7}} \approx 0,00168067$$

Full House:

Um dieses Beispiel zu lösen müssen einige Unterscheidungen vorgenommen werden. Aus diesem Grund wird zunächst von einem bestimmten Wert für den Drilling und einem bestimmten Wert für das Paar ausgegangen. Der Drilling kann in je drei der vier vorhandenen Farben gezogen werden, das Paar nur in zwei. Somit gibt es $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten einen bestimmten Drilling und ein bestimmtes Paar zu erhalten.

Die beiden anderen Karten lassen sich nur noch aus einer 44–elementigen Menge ziehen. Denn alle Karten, die den Wert des Drillings oder des Paares besitzen, müssen von den ursprünglich 52 Stück subtrahiert werden. Es bleiben also zunächst $\binom{44}{2}$ Möglichkeiten, die übrigen beiden Karten zu ziehen.

Der Wert des Drillings soll im Folgenden mit k bezeichnet werden und der Wert des Paares mit j. Um dem Rechengang besser folgen zu können, werden den einzelnen Karten folgende Werte zugeordnet.

Karte	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
Wert	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Nun muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden. Es ist nämlich zu unterscheiden, ob der Wert des Drillings größer oder kleiner ist als der Wert des Paares. Da es nur vier Karten eines jeden Wertes gibt, ist es unmöglich, dass der Drilling und das Paar denselben Wert besitzen.

1. Fall: $k < j$
Wenn der Wert des Drillings kleiner ist als der Wert des Paares, muss die Anzahl jener Paare, die einen größeren Wert als j besitzen von $\binom{44}{2}$ subtrahiert werden. Soll ein Spieler zum Beispiel das Blatt $\{9, 9, 9, J, J\}$ besitzen, darf das Paar $\{K, K\}$ nicht gezogen werden, denn dann entstünde das Full House $\{9, 9, 9, K, K\}$, das einen höheren Wert besitzt. Ein Blick auf die Wertetabelle zeigt, dass je $(j - 1)$ Paare subtrahiert werden müssen, die sich wieder aus zwei der vier Farben zusammenstellen lassen: $\binom{44}{2} - (j-1) \cdot \binom{4}{2}$.
Man erhält also für den ersten Fall:

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (l-1) \cdot \binom{4}{2} \right)$$

2. Fall: $k > j$
Wenn der Wert des Drillings allerdings größer ist als der Wert des Paares, führt eine ähnliche Überlegung wie oben zur Lösung. Es müssen alle Paare, die einen größeren Wert als j besitzen, von $\binom{44}{2}$ subtrahiert werden. Diesmal ist aber auch k unter diesen Werten. Da es nicht möglich ist, noch ein Paar mit dem Wert k zu ziehen, weil bereits drei Karten dieses Wertes entnommen wurden, muss der Wert k ebenfalls abgezogen werden. Somit werden insgesamt $(j-2)$ Paare subtrahiert: $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-2) \cdot \binom{4}{2}\right)$.

Da $k > j$ ist, muss zusätzlich beachtet werden, dass noch eine weitere Karte mit dem Wert j gezogen werden darf. Dieser Drilling hätte einen kleineren Wert als der bereits vorhandene und würde somit nicht gewertet werden. Wenn ein Spieler zum Beispiel das Blatt $\{J, J, J, 9, 9, 9, 4\}$ hat, zählen die drei Buben und die zwei Neuner. Es müssen demzufolge wieder einige Kombinationen addiert werden. Nämlich jene, in denen ein Drilling vom Wert k gezogen wird, danach ein weiterer Drilling vom Wert j und schließlich noch eine beliebige Karte, die aus den übrigen 44 kommen kann: $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}$.

Insgesamt ergibt sich demnach für den zweiten Fall:

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-2) \cdot \binom{4}{2}\right) + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}$$

Bis jetzt wurde von einem festen k und einem festen j ausgegangen. Nun soll über alle j summiert werden, welche die Werte $1, 2, ..., 13$ annehmen können. Insgesamt erhält man:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{13} \left[\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-1) \cdot \binom{4}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-2) \cdot \binom{4}{2}\right) + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}\right] =$$

Die Summe wird aufgespalten, wobei j im Fall $k < j$ die Werte $1, 2, ..., (k-1)$ annimmt und im Fall $k > j$ die Werte $(k+1), (k+2), ..., 13$.

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-1) \cdot \binom{4}{2} \right) +$$
$$\sum_{j=k+1}^{13} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-2) \cdot \binom{4}{2} \right) + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1} =$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wird $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ herausgehoben:

$$= \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{13} \binom{44}{2} - \binom{4}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-1} (j-1) + \sum_{j=k+1}^{13} (j-2) \right) \right) +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{13} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1} =$$

Es befinden sich vier Summen in der obigen Rechnung. Diese sollen nun separat berechnet werden.

(1) $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{13} \binom{44}{2} = 12 \cdot \binom{44}{2}$.

(2) $\sum\limits_{j=1}^{k-1} (j-1) = 0 + 1 + 2 + ... + (k-2)$.

(3) $\sum\limits_{j=k+1}^{13} (j-2) = (k-1) + k + ... + 11$.

Die Ergebnisse der zweiten und dritten Summe können addiert werden:

$$\sum_{j=1}^{k-1} (j-1) + \sum_{j=k+1}^{13} (j-2) =$$
$$= 0 + 1 + ...(k-1) + k + (k+1) + ... + 10 + 11 = 66$$

(4) $\sum\limits_{j=k+1}^{13} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1} = (13-k) \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}$.

Diese Teilergebnisse können nun in die Ausgangsrechnung übertragen werden:

$$= \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(12 \cdot \binom{44}{2} - 66 \cdot \binom{4}{2}\right) + (13-k)\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}$$

Der Wert k ist immer noch fest, also muss noch über alle k summiert werden.

$$\sum_{k=1}^{13} \left[\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(12 \cdot \binom{44}{2} - 66 \cdot \binom{4}{2}\right) + \right.$$
$$\left. +(13-k)\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}\right] =$$
$$= \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(13 \cdot 12 \cdot \binom{44}{2} - 13 \cdot 66 \cdot \binom{4}{2}\right) +$$
$$+\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1} \sum_{k=1}^{13}(13-k) =$$

Die Summe wird wieder separat betrachtet:
$\sum_{k=1}^{13}(13-k) = 0 + 1 + ... + 13 = 78.$

Daher erhält man insgesamt für die Anzahl der möglichen Full House Ziehungen:

$$= \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(13 \cdot 12 \cdot \binom{44}{2} - 13 \cdot 66 \cdot \binom{4}{2}\right) + 78 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}$$

Nun lässt sich die Wahrscheinlichkeit für ein Full House berechnen, indem man durch die Anzahl aller möglichen Ziehungen dividiert.

$$P(\text{Full House}) =$$
$$= \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(13 \cdot 12 \cdot \binom{44}{2} - 13 \cdot 66 \cdot \binom{4}{2}\right) + 78 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}}{\binom{52}{7}} \approx 0.02596102$$

Flush:

Für einen Flush stehen vier Farben zur Auswahl.

Zunächst muss eine Unterscheidung vorgenommen werden. Um aus den insgesamt sieben gezogenen Karten einen Flush zu bilden, können fünf, sechs oder sieben Karten die gleiche Farbe besitzen. Diese drei Möglichkeiten (Flush mit fünf gleichfarbigen Karten, Flush mit sechs gleichfarbigen Karten und Flush mir sieben gleichfarbigen Karten) werden nun nacheinander behandelt.

1. Fall:
Im ersten Fall wird ein Flush mit fünf gleichfarbigen Karten gezogen. Dazu werden aus den insgesamt 13 Werten fünf verschiedene ausgewählt. Diese dürfen allerdings keine Straße bilden. Also werden zehn Möglichkeiten, das entspricht der Anzahl der unterschiedlichen Straßenkombinationen, wieder abgezogen. Es bleiben also noch 39 Karten übrig, die eine andere Farbe besitzen. Aus diesen müssen noch zwei Karten gezogen werden. Somit erhält man für die Anzahl der Kombinationen:

$$\left(\binom{13}{5} - 10\right) \cdot \binom{39}{2}$$

2. Fall:
Im zweiten Fall gibt es nun sechs Karten der gleichen Farbe. Man zieht also sechs Werte aus einer Menge von 13 Werten. Wie im ersten Fall müssen die Möglichkeiten für einen Straight Flush und einen Royal Flush abgezogen werden. Insgesamt gibt es zehn mögliche Straßenkombinationen. Wenn die fünf gleichfarbigen Karten eine Straße mit einem Ass als höchstem Wert bilden, wofür es nur eine Möglichkeit gibt, kann die sechste Karte einen beliebigen der verbliebenen acht Werte dieser Farbe annehmen. Aus diesen wird einer ausgewählt. Bei den anderen neun Straßenkombinationen darf die sechste Karten nur aus sieben Werten gewählt werden, da je ein Wert das Blatt zu einem höheren Straight macht. Man betrachte zum Beispiel die Kombination $\{J, T, 9, 8, 7, 6\}$. In diesem Fall würde für den Spieler die Straße $\{J, T, 9, 8, 7\}$ zählen und nicht $\{T, 9, 8, 7, 6\}$. Aus den 39 Karten anderer Farbe wird noch eine Karte gezogen. Insgesamt hat man folgende Anzahl von Möglichkeiten:

$$\left(\binom{13}{6} - \left(1 \cdot \binom{8}{1} + 9 \cdot \binom{7}{1}\right)\right) \cdot \binom{39}{1}$$

3. Fall:
Schließlich gibt es noch die Möglichkeit, dass alle sieben Karten dieselbe Farbe besitzen. In diesem Fall wird eine 7–elementige Stichprobe aus einer 13–elementigen Menge entnommen. Beim Subtrahieren der Straßen wird wieder diejenige mit dem Ass als höchstem Wert von den anderen Straßenkombinationen unterschieden. Diesmal gibt es je zwei Werte, die aus den acht beziehungsweise sieben übriggebliebenen gezogen werden. Daher ergeben sich die Kombinationen:

$$\binom{13}{7} - \left(1 \cdot \binom{8}{2} + 9 \cdot \binom{7}{2}\right)$$

Um die Wahrscheinlichkeit für einen Flush berechnen zu können, müssen alle drei Fälle addiert werden, um das Ergebnis anschließend durch die Anzahl der Möglichkeiten, sieben Karten aus insgesamt 52 zu ziehen, zu dividieren.

$$P(\text{Flush}) = \frac{4 \cdot \left(\left(\left(\binom{13}{5} - 10\right) \cdot \binom{39}{2} + \left(\left(\binom{13}{6} - \left(1 \cdot \binom{8}{1} + 9 \cdot \binom{7}{1}\right)\right)\right) \cdot \binom{39}{1}\right.}{\binom{52}{7}} + \\ + \frac{\binom{13}{7} - \left(1 \cdot \binom{8}{2} + 9 \cdot \binom{7}{2}\right)\left.\right)}{\binom{52}{7}} \approx 0,03025494$$

Straight

Um die Wahrscheinlichkeit ein Straight zu ziehen berechnen zu können, müssen vier Fälle unterschieden werden.

1. Fall: alle sieben Karten haben unterschiedliche Werte
Jede der sieben Karten kann in vier verschiedenen Farben gezogen werden, also gibt es 4^7 Möglichkeiten für die Farbauswahl.

Aus diesen Karten darf jedoch kein Flush entstehen. Ein Flush kann in vier Farben gezogen werden. Da ein Spieler sieben Karten zur Bildung seiner Hand zur Verfügung hat, können fünf, sechs oder sieben Karten die gleiche Farbe besitzen. Wenn fünf der sieben Karten die gleiche Farbe haben, dann bleiben den anderen beiden Karten noch drei Farben zur Auswahl: $\binom{7}{5} \cdot 3^2$.
Falls aber sechs der sieben Karten von gleicher Farbe sind, stehen der letzten Karte noch drei Farben zur Verfügung: $\binom{7}{6} \cdot 3$.
Oder es besitzen alle sieben Karten die gleiche Farbe: $\binom{7}{7}$.

Diese drei Möglichkeiten einen Flush zu erhalten müssen nun abgezogen werden:

$$4^7 - 4\left(\binom{7}{5}\cdot 3^2 + \binom{7}{6}\cdot 3 + \binom{7}{7}\right)$$

Nun müssen fünf aus diesen sieben Karten eine Straße bilden. Wenn die höchste Straße $\{A, K, Q, J, T\}$ gezogen wird, können die übrigen zwei Karten jeden beliebigen der acht Werte annehmen: $1 \cdot \binom{8}{2}$. Bei jeder anderen der neun Straßenkombinationen dürfen die letzten beiden Karten nur noch einen von je sieben Werten annehmen, da ein Wert das Blatt zu einer höheren Straße machen würde: $9 \cdot \binom{7}{2}$.

Somit ergibt sich für den ersten Fall:

$$\left(4^7 - 4\left(\binom{7}{5}\cdot 3^2 + \binom{7}{6}\cdot 3 + \binom{7}{7}\right)\right)\cdot\left(\binom{8}{2} + 9\cdot\binom{7}{2}\right)$$

2. Fall: unter den sieben Karten befindet sich ein Paar
Hier muss eine weitere Unterscheidung vorgenommen werden. Das Paar kann entweder mit einem Wert, der nicht Teil des Straights ist, gebildet werden, oder ein Wert des Straights kommt doppelt vor.

Zunächst soll das Paar mit einem von den Werten des Straights verschiedenen Wert gebildet werden. Die Farben der fünf Karten, die kein Paar bilden, können beliebig aus den insgesamt vier Farben gewählt werden. Die des Paares wird aus einer 4–elementigen Menge gezogen: $4^5 \cdot \binom{4}{2}$.

Wieder müssen die Möglichkeiten für einen Flush abgezogen werden, der vier Farben annehmen kann. Wenn der Flush aus einer Karte des Paares und vier der übrigen fünf Karten mit unterschiedlichen Werten besteht, können sowohl eine der fünf Karten (die nicht Teil des Flushs sind), als auch die zweite Karte des Paares noch drei Farben annehmen: $5 \cdot 3 \cdot 3$. Es können aber auch alle fünf Karten von unterschiedlichem Wert die gleiche Farbe besitzen. In diesem Fall können die zwei Karten des Paares nur noch drei Farben annehmen. Zuletzt gibt es noch die Möglichkeit, dass eine Karte des Paares die gleiche Farbe hat wie die übrigen fünf Karten von unterschiedlichem Wert. Somit stehen für die zweiten Karte des Paares nur noch drei Farben zur Auswahl. All diese Möglichkeiten müssen nun abgezogen werden:

$$4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)$$

Auch diese Karten sollen eine Straße bilden. Da sich unter den sieben Karten ein Paar befindet, stehen nur sechs Werte für die Bildung des Straight zur Verfügung. Wenn fünf davon die höchstmögliche Straße bilden, kann der letzte Wert noch aus allen acht verbliebenen Werten gezogen werden. Bei jeder der anderen neun Straßenkombinationen, stehen nur noch sieben Werte zur Auswahl, da sonst eine höhere Straße entsteht. Demnach erhält man zunächst:

$$\left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)\right) \cdot (8 + 9 \cdot 7)$$

Nun soll eine Karte des Paares auch Teil des Straights sein. Da ein Straight aus fünf verschiedenen Werten besteht, gibt es fünf Möglichkeiten den Wert zu bestimmen, der doppelt vorkommen soll.

Im Grunde besteht die gleiche Ausgangslage wie oben. Es gibt sieben Karten, die jede beliebige Farbe annehmen können, wobei es unmöglich ist, dass die Karten des Paares die gleiche Farbe besitzen. Die Möglichkeiten für einen Flush müssen wieder abgezogen werden. Wie oben soll auch hier aus sechs verschiedenen Werten eine Straße gebildet werden. Also können die bereits gewonnenen Informationen wieder verwendet werden:

$$5 \cdot \left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)\right) \cdot (8 + 9 \cdot 7)$$

Die beiden Teilergebnisse des zweiten Falls können nun zusammengefasst werden. Somit ergibt sich insgesamt für den zweiten Fall:

$$\begin{aligned}
&\left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)\right) \cdot (8 + 9 \cdot 7) + \\
&+ 5 \cdot \left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)\right) \cdot (8 + 9 \cdot 7) = \\
&= 6 \cdot \left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)\right) \cdot (8 + 9 \cdot 7)
\end{aligned}$$

3. Fall: unter den sieben Werten befindet sich ein Drilling

Zuerst wird die Farbzusammenstellung betrachtet. Eine Karte des Drilling ist notwendigerweise auch Teil des Straights, da nur sieben Karten gezogen werden. Der Wert des Drillings kann also aus den fünf Werten des Straights ausgewählt werden. Um die Farbe des Drillings zu bestimmen wird eine 3–elementige Stichprobe aus einer 4–elementigen Menge gezogen. Die Farbe der übrigen vier Karten kann beliebig aus den insgesamt vier vorhandenen gewählt werden: $5 \cdot 4^4 \cdot \binom{4}{3}$.

Die Möglichkeiten für einen Flush müssen wieder abgezogen werden. Es gibt vier Farben, die ein Flush annehmen kann, wobei die übrigen zwei Karten nur noch in drei Farben gezogen werden können. Da sich ein Drilling unter den sieben Karten befindet, gibt es keine weiteren Möglichkeiten für die Bildung eines Flushs.

$$5 \cdot \left(4^4 \cdot \binom{4}{3} - 4 \cdot \binom{3}{2}\right)$$

Nun muss aus den fünf unterschiedlichen Werten eine Straße gebildet werden. Dafür gibt es zehn Möglichkeiten.[2]

Demnach bekommt man für den dritten Fall:

$$10 \cdot 5 \cdot \left(4^4 \cdot \binom{4}{3} - 4 \cdot \binom{3}{2}\right)$$

4. Fall: unter den sieben Karten befinden sich zwei Paare
Da nur sieben Karten zur Verfügung stehen, muss eine Karte jedes Paares Teil des Straights sein. Somit ergeben sich $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten die Werte für beide Paare unter fünf verschiedenen Werten auszuwählen. Die beiden Karten des Paares können in je vier Farben gezogen werden. Die drei übrigen Karten können jede beliebige der vier Farben annehmen: $\binom{5}{2} \cdot 4^3 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$.

Die vier Möglichkeiten einen Flush zu erhalten müssen noch abgezogen werden. Den beiden anderen Karten des Paares stehen dann noch drei Farben zur Auswahl:

$$\binom{5}{2} \cdot \left(4^3 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot 3 \cdot 3\right)$$

Da es insgesamt zehn Möglichkeiten gibt mit den fünf unterschiedlichen Werten eine Straße zu bilden, lautet die Lösung für den vierten Fall:

$$10 \cdot \binom{5}{2} \cdot \left(4^3 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot 3 \cdot 3\right)$$

[2] siehe Kapitel 4.1.2 (Five Card Draw–Die Chancen auf ein gutes Blatt): Straight.

Um die Wahrscheinlichkeit ein Straight zu bekommen berechnen zu können, müssen nun alle vier Fälle addiert werden. Folglich erhält man:

$$\begin{aligned}
&P(\text{Straight}) = \\
&= \frac{\left(4^7 - 4\left(\binom{7}{5}\cdot 3^2 + \binom{7}{6}\cdot 3 + \binom{7}{7}\right)\right)\cdot\left(\binom{8}{2} + 9\cdot\binom{7}{2}\right)}{\binom{52}{7}} + \\
&+ \frac{6\cdot\left(4^5\cdot\binom{4}{2} - 4\cdot\left(5\cdot 3\cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)\right)\cdot(8 + 9\cdot 7)}{\binom{52}{7}} + \\
&+ \frac{10\cdot 5\cdot\left(4^4\cdot\binom{4}{3} - 4\cdot\binom{3}{2}\right) + 10\cdot\binom{5}{2}\cdot\left(4^3\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2} - 4\cdot 3\cdot 3\right)}{\binom{52}{7}} \approx \\
&\approx 0,04619382
\end{aligned}$$

Three of a Kind

Zunächst gibt es 13 verschiedene Werte, von denen man einen für den Drilling auswählen kann.
Mit den übrigen vier Karten dürfen sich keine Paare bilden lassen, da das Blatt sonst zu einem Full House werden würde. Natürlich darf auch der Wert des Drillings nicht mehr vorkommen. Es wird demnach eine 4–elementige Stichprobe aus einer 12–elementigen Menge gezogen.
Diese fünf Karten dürfen allerdings keine Straße bilden, womit die Möglichkeiten dafür abgezogen werden müssen. Die Anzahl der Straßenkombinationen wird folgendermaßen ermittelt. Angenommen der Drilling besitzt den Wert A, dann gibt es zwei mögliche Straßenkombinationen: $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ und $\{T, J, Q, K, A\}$. Wenn der Drilling den Wert 2 besitzt, existieren ebenfalls zwei Straßenkombinationen, die diesen Wert enthalten: $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ und $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Betrachtet man analog dazu die übrigen Werte, ergibt sich folgende Tabelle, die jedem Wert des Drillings die Anzahl der möglichen Straßenkombinationen zuordnet.

Wert	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
Straßen	2	2	3	4	5	5	5	5	5	5	4	3	2

Alle Möglichkeiten addiert ergeben 50. Diese müssen nun von der Gesamtanzahl der Drillinge abgezogen werden. Somit erhält man:

$$13\cdot\binom{12}{4} - 50$$

Nun muss noch die Farbzusammenstellung berücksichtigt werden. Die Karten des Drillings können in drei der vier möglichen Farben gezogen werden. Zunächst können die übrigen vier Karten jede beliebige Farbe annehmen. Es darf dabei allerdings kein Flush entstehen. Ein solches kann in vier Farben gezogen werden. Die restlichen zwei Karten müssen jeweils eine der anderen drei Farben annehmen, da der Drilling aus drei verschiedenfarbigen Karten besteht.
Somit erhält man für die Farbzusammenstellung:

$$\binom{4}{3} \cdot 4^4 - 4 \cdot \binom{3}{2}$$

Die Anzahl aller Möglichkeiten einen Drilling zu ziehen muss wieder durch $\binom{52}{7}$ dividiert werden. Insgesamt ergibt sich also folgende Wahrscheinlichkeit für ein Three of a Kind:

$$\frac{\left(13 \cdot \binom{12}{4} - 50\right) \cdot \left(\binom{4}{3} \cdot 4^4 - 4 \cdot \binom{3}{2}\right)}{\binom{52}{7}} \approx 0.0482987$$

Two Pair

In diesem Beispiel müssen wieder zwei Fälle unterschieden werden. Die drei Karten, die nicht zu den beiden Paaren gehören, können entweder völlig unterschiedliche Werte annehmen oder ein weiteres Paar bilden, wobei dann die letzte Karte einen anderen Wert haben muss.

1. Fall:
Für die zwei Paare wird jeweils ein Wert ausgewählt. Also zieht man eine 2–elementige Stichprobe aus einer 13–elementigen Menge. Jede Karte der zwei Paare kann zwei der vier möglichen Farben annehmen.
Die restlichen drei Karten, die in diesem Fall unterschiedlichen Wertes sind, können nun aus 11 Werten gezogen werden. Jede dieser drei Karten kann jede beliebige Farbe annehmen. Somit erhält man vorerst:

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{11}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3$$

Es wurde allerdings noch nicht beachtet, dass bei der Farbzusammenstellung ein Flush entstehen könnte. Die Möglichkeiten dafür müssen noch abgezogen werden. Für einen Flush muss eine Karte des ersten Paares dieselbe Farbe haben wie eine Karte des zweiten Paares. Außerdem müssen die übrigen drei Karten ebenfalls diese Farbe besitzen. Für die drei

Karten von unterschiedlichem Wert gibt es vier Möglichkeiten die gleiche Farbe zu besitzen, da es vier Farben gibt. Auch eine Karte eines jeden Paares muss diese Farbe besitzen, wofür es dann nur eine Möglichkeit gibt. Die übrigen beiden Karten der Paare können eine beliebige der drei noch vorhandenen Farben annehmen. Die neuen Erkenntnisse mit den alten zusammengefügt ergeben:

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{11}{3} \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 3^2 \right)$$

Nun wurde allerdings noch nicht beachtet, dass keine Straights entstehen dürfen. Die Anzahl dafür wird wieder wie im Beispiel Three of a Kind abgezählt. Angenommen die beiden Paare haben die Symbole A (Wert 1) und 2. Dann gibt es nur eine Möglichkeit für eine Straße: $\{A, 2, 3, 4, 5\}$. Wenn die Paare aber die Symbole 2 und 3 haben, ergeben sich bereits zwei mögliche Straßenkombinationen: $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ und $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Analog zu dieser Überlegung ergibt sich:

Paare	A;2	2;3	3;4	4;5	5;6	6;7	7;8
Straßen	1	2	3	4	4	4	4
Paare	8;9	9;T	T;J	J;Q	Q;K	K;A	
Straßen	4	4	4	3	2	1	

Für die benachbarten Paare ergeben sich also insgesamt 40 Möglichkeiten für eine Straße.

Nun wird ein Wert zwischen den Paaren frei gelassen. Angenommen es wurden die Paare mit dem Symbol A (Wert 1) und 3 gezogen. Es gibt hier nur eine Möglichkeit für eine Straße: $\{A, 2, 3, 4, 5\}$. In diesem Sinne erhält man folgende Tabelle:

Paare	A;3	2;4	3;5	4;6	5;7	6;8
Straßen	1	2	3	3	3	3
Paare	7;9	8;T	9;J	T;Q	J;K	Q;A
Straßen	3	3	3	3	2	1

In diesem Fall ergeben sich 30 Möglichkeiten für eine Straße.

Nun werden je zwei Werte zwischen den beiden Paaren ausgelassen. Werden die Symbole A (Wert 1) und 4 gezogen, oder die Symbole D und A (höchster Wert) ergibt sich jeweils eine Möglichkeit für eine Straße: $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ und $\{T, J, Q, K, A\}$. Für alle neun Wertpaare dazwischen (von den Paaren mit den Symbolen 3 und 5, bis zu den Paaren mit den Symbolen T und Q) gibt es je zwei verschiedene Straßenkombinationen. Zum Beispiel gibt es für ein Paar mit den Symbolen 8 und J folgende Möglichkeiten: $\{7, 8, 9, T, J\}$ und $\{8, 9, T, J, Q\}$.
Somit ergeben sich hier insgesamt 20 Straßenkombinationen.

Wenn drei Werte zwischen den Symbolen der Paare freigelassen werden, lässt sich mit jedem der zehn Wertpaare eine Straße bilden. Zum Beispiel ergibt sich für die Paare mit den Werten 7 und J: $\{7, 8, 9, T, J\}$.
In diesem Fall hat man also 10 Möglichkeiten eine Straße zu bilden.

Alle möglichen Paarkombinationen wurden berücksichtigt. Wenn man diese Möglichkeiten zusammenrechnet, so erhält man: $40+30+20+10 = 100$. Demnach gibt es insgesamt 100 Straßen, die mit zwei Paaren gebildet werden können.

Die Farbkombinationen der Straights müssen noch näher betrachtet werden. Die Farbe der zwei Paare erhält man wieder durch ziehen einer 2–elementigen Stichprobe aus einer 4–elementigen Menge. Die übrigen drei Karten können jede der vier möglichen Farben annehmen. Davon müssen allerdings die Flushs abgezogen werden, da diese oben berücksichtigt und somit bereits abgezogen wurden. Es gibt vier Möglichkeiten für einen Flush, der nur aus je einer Karte eines Paares und den drei übrigen Karten bestehen kann. Die zwei restlichen Karten der Paare haben notwendigerweise eine andere Farbe.
Somit erhält man für den ersten Fall:

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{11}{3} \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 3^2 \right) -$$
$$-100 \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 3^2 \right)$$

2. Fall:
Nun wird der Fall, dass unter den sieben Karten drei Paare zu finden sind, behandelt.
Es werden also drei der 13 Werte gezogen. Für die Farben jedes von diesen Paaren wird eine 2–elementige Stichprobe aus einer 4–elementigen Menge entnommen. Der Wert der letzten Karte kann beliebig unter den übrigen Werten gewählt werden, da es nicht möglich ist, dass ein Flush

oder ein Straight entsteht. Es darf nur kein Drilling gezogen werden. Demnach bleiben noch zehn Werte für die letzte Karte übrig, die in vier Farben auftreten darf.
Also gilt für den zweiten Fall:

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 10 \cdot 4$$

Wenn man nun beide Fälle addiert und durch $\binom{52}{7}$ dividiert, erhält man folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} P(\text{Two Pair}) =& \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{11}{3} \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 3^2\right)}{\binom{52}{7}} \\ &- \frac{100 \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 3^2\right)}{\binom{52}{7}} \\ &+ \frac{\binom{13}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 10 \cdot 4}{\binom{52}{7}} \approx 0,23495536 \end{aligned}$$

Pair

Für das Paar stehen 13 verschiedene Werte zur Verfügung. Die übrigen fünf Karten dürfen nur unterschiedliche Werte aus den 12 verbliebenen annehmen, da kein Drilling und kein zweites Paar gezogen werden darf: $13 \cdot \binom{12}{5}$.

Nun muss noch darauf geachtet werden, dass sich aus den sieben Karten kein Straight zusammenstellen lässt. Die Anzahl der möglichen Straights ist teilweise vom Wert des Paares abhängig.

Paar mit A:
Wenn das Paar den Wert A hat, gibt es zwei mögliche Straßen, die mit einer Karte dieses Paares gebildet werden können:
$\{A, 2, 3, 4, 5\}$ und $\{T, J, Q, K, A\}$.
Die letzte Karte kann noch einen der acht übrigen Werte annehmen. Natürlich kann eine Straße auch mit den fünf Karten unterschiedlichen Wertes gebildet werden. Dafür gibt es sechs Möglichkeiten: $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\{6, 7, 8, 9, T\}$, $\{7, 8, 9, T, J\}$ und $\{8, 9, T, J, Q\}$.
Die übrigen vier Straßen wurden bereits berücksichtigt:
$\{A, 2, 3, 4, 5\}$ und $\{T, J, Q, K, A\}$ enthalten beide den Wert A und die Straße $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ wird zu $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ wenn die siebte Karte den Wert

6 besitzt. Weiters wurde die Straße $\{9, T, J, Q, K\}$ bereits abgezogen, da sie aus dem Blatt $\{T, J, Q, K, A\}$ und dem Wert 9 entsteht.
Also gibt es $2 \cdot 8 + 6 = 22$ mögliche Straßen, wenn das Paar den Wert A besitzt.

Paar mit 2 bzw. K**:**
Nun soll das Paar den Wert 2 besitzen. Bei der Straße $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ bleiben noch acht Werte für die letzte Karte und bei der Straße $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ bleiben noch sieben Werte für die letzte Karte, da der Wert A bereits berücksichtigt wurde. Aus den übrigen fünf Karten lassen sich außerdem noch sieben Straßen zusammenstellen, die noch nicht beachtet wurden: $\{A, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ wurden bereits berücksichtigt.
Somit erhält man $1 \cdot 8 + 1 \cdot 7 + 7 = 22$ mögliche Straßen, wenn das Paar den Wert 2 besitzt.

Die Anzahl der Straßenkombinationen für ein Paar mit dem Wert K kann analog berechnet werden. Sie lautet somit ebenfalls 22.

Paar mit 3 bzw. Q**:**
Wenn das Paar den Wert 3 besitzt und die Straße $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ gezogen wird, kann die siebte Karte noch acht Werte annehmen. Für die Straßen $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ stehen nur noch sieben Werte zur Verfügung. Zusätzlich können aus den fünf Karten mit unterschiedlichem Wert noch sechs Straights gebildet werden: $\{A, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ und $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ wurden bereits berücksichtigt.
Demnach gibt es $1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 6 = 28$ Möglichkeiten eine Straße mit einem Paar des Wertes 3 zu erhalten.

Für ein Paar des Wertes Q gilt dieselbe Überlegung, auch hier gibt es 28 mögliche Straßenkombinationen.

Paar mit 4 bzw. J**:**
Der Wert des Paares sei nun 4. Die Straße $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ lässt alle acht übrigen Werte für die letzte Karte zu, während bei den darauffolgenden drei Straßen nur noch sieben Werte gezogen werden dürfen. Zusätzlich können fünf Straßen ohne eine Karte des Paares gebildet werden: $\{6, 7, 8, 9, T\}$, $\{7, 8, 9, T, J\}$, $\{8, 9, T, J, Q\}$, $\{9, T, J, Q, K\}$ und $\{T, J, Q, K, A\}$.
Folglich ergeben sich $1 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 5 = 34$ mögliche Straßen.

Somit gibt es für den Wert J auch 34 Straßenkombinationen.

Paar mit 5 bzw. T:
Wenn das Paar den Wert 5 annimmt, gibt es für die niedrigste Straße acht Werte, welche die letzte Karte annehmen darf. Bei den darauffolgenden vier Straßen dürfen nur noch jeweils sieben Werte gezogen werden, da der achte Wert bereits berücksichtigt wurde. Außerdem gibt es noch vier mögliche Straßenkombinationen ohne den Wert 5, nämlich: $\{7, 8, 9, T, J\}$, $\{8, 9, T, J, Q\}$, $\{9, T, J, Q, K\}$ und $\{T, J, Q, K, A\}$.
Man erhält $1 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 4 = 40$ mögliche Straßenkombinationen für den Wert 5 und analog auch für den Wert T.

Paar mit 6, 7, 8 bzw. 9:
Für die Paare mit den Werten 6, 7, 8 und 9 gelten dieselben Überlegungen. Es gibt hier jeweils drei zu bildende Straßenkombinationen, die den Wert des Paares nicht beinhalten.
Für die Werte 6, 7, 8 und 9 bekommt man insgesamt folgende Anzahl möglicher Straßen: $1 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 3 = 39$.

Nun kann die Gesamtanzahl der möglichen Straßenkombinationen berechnet werden: $3 \cdot 22 + 2 \cdot 28 + 2 \cdot 34 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 39 = 426$.

Somit erhält man folgende Möglichkeiten nur ein Paar zu ziehen:

$$13 \cdot \binom{12}{5} - 426$$

Farben wurden allerdings noch keine berücksichtigt. Für die Farbe des Paares wird eine 2–elementige Stichprobe aus einer 4–elementigen Menge entnommen. Die restlichen fünf Karten können jede beliebige der insgesamt vier Farben annehmen: $4^5 \cdot \binom{4}{2}$.
Von diesen müssen noch die Möglichkeiten für ein Flush, der in vier Farben auftreten kann, abgezogen werden. Um ein Flush zu ziehen, können entweder sechs oder fünf Karten von gleicher Farbe sein. Im ersten Fall kann die letzte Karte noch drei Farben annehmen. Im zweiten Fall kann entweder eine Karte des Paares auch Teil des Flushs sein, oder der Flush wird nur aus den fünf Karten verschiedener Werte gebildet. Wenn sich eine Karte des Paares unter den gleichfarbigen Karten befindet, gibt es fünf Möglichkeiten eine Karte, die nicht zum Paar gehört und eine andere Farbe besitzen soll, auszuwählen. Diese hat drei Farben zur Auswahl, genauso wie die zweite Karte des Paares. Wenn der Flush aber nur aus den Karten mit unterschiedlichen Werten bestehen soll, können die Farben für die beiden Karten des Paares aus drei möglichen Farben gezogen werden.

Die Anzahl der Flushs soll nun von der Gesamtanzahl der Farbkombinationen abgezogen werden:

$$4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4\left(3 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2}\right)$$

Insgesamt beträgt die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Pair}) = \frac{\left(13 \cdot \binom{12}{5} - 426\right) \cdot \left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4\left(3 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2}\right)\right)}{\binom{52}{7}} \approx$$
$$\approx 0,43822546$$

High Card

Nun fehlt nur noch die Wahrscheinlichkeit, keine der eben erwähnten Kombinationen zu ziehen. Auch dann gibt es noch die Chance das Spiel zu gewinnen, falls die übrigen Spieler ebenfalls keine der Kombinationen erhalten. In diesem Fall, gewinnt der Spieler mit der höchsten Karte.

Die Wahrscheinlichkeit mit fünf Karten kein Paar oder etwas besseres bilden zu können, wird wie bei Five Card Draw mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnet:

$$\begin{gathered} P(\text{High Card}) = 1 - (P(\text{Royal Flush}) + P(\text{Straight Flush}) + \\ + P(\text{Four of a Kind}) + P(\text{Full House}) + P(\text{Flush}) + P(\text{Straight}) + \\ P(\text{Three of a Kind}) + P(\text{Two Pair}) + P(\text{Pair})) = \\ = 1 - (0.00003232 + 0.00027851 + 0,00168067 + 0,02596102 + 0,03025494 + \\ + 0,04619382 + 0,0482987 + 0,23495536 + 0,43822546) = \\ = 0.1741192 \end{gathered}$$

Tabelle: Texas Hold'em

Um eine bessere Übersicht über die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Blätter in Texas Hold'em zu erhalten, werden auch diese in einer Tabelle aufgelistet:

Kombination	Wahrscheinlichkeit
Royal Flush	0,00003232
Straight Flush	0,00027851
Four of a Kind	0,00168067
Full House	0,02596102
Flush	0,03025494
Straight	0,04619382
Three of a Kind	0,04829870
Two Pair	0,23495536
Pair	0,43822546
High Card	0,17411920

Es fällt auf, dass ein Spieler, im Gegensatz zu Five Card Draw, eher ein Pair oder Two Pair als gar keine Kombination erhält. Offensichtlich reichen zwei zusätzliche Karten aus, um die Wahrscheinlichkeit für ein gutes Blatt erheblich zu verbessern.

5.2 Omaha Hold'em

Die Regeln für Omaha Hold'em sind im Prinzip dieselben wie für Texas Hold'em. Der einzige Unterschied besteht darin, dass es vier Hole–Cards gibt. Jeder Spieler bekommt also gleich zu Beginn des Spiels vier verdeckte Karten. Danach werden nacheinander die fünf Community–Cards aufgedeckt, jeweils gefolgt von Wettrunden. Das für den Showdown ausgewählte Blatt muss allerdings aus zwei Hole–Cards und drei Community–Cards zusammengestellt werden.

5.2.1 Die Chancen auf ein gutes Blatt

Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, werden hier nicht alle Wahrscheinlichkeiten von Royal Flush bis High Card berechnet. Es stellt sich allerdings die Frage, ob sich die Wahrscheinlichkeit für ein gutes Blatt nun erhöht oder verringert. Es ließe sich vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit größer wird, da man mehr Karten für die Bildung seines Blattes zur Verfügung hat. Andererseits ist man gezwungen genau zwei Hole–Cards und drei

Community–Cards für seine Hand zu verwenden, was die Chancen wiederum verschlechtert. Diese Frage soll nun anhand eines Beispiels beantwortet werden.

Royal Flush:

Wie gewohnt gibt es wieder vier verschiedene Farben, in denen ein Royal Flush auftreten kann.

Zunächst werden die Kombinationen der vier Hole–Cards betrachtet. Zwei der fünf Karten, die einen Royal Flush bilden, müssen in diesen Hole–Cards vorzufinden sein. Die übrigen zwei können beliebig aus den noch vorhandenen 47 Karten gezogen werden. Diese vier Hole–Cards werden aus den insgesamt 52 Karten gezogen. Somit erhält man folgende Wahrscheinlichkeit zwei Karten des Royal Flush in einer bestimmten Farbe unter den vier Hole–Cards zu finden:

$$P(\text{Royal Flush: Hole–Cards}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{47}{2}}{\binom{52}{4}}$$

Unter den fünf Community–Cards müssen nun die restlichen drei Karten, des Royal Flush vorzufinden sein. Wiederum können die übrigen beiden Community–Cards beliebig aus den noch vorhandenen 45 Karten gewählt werden. Insgesamt werden nur noch fünf Karten von 48 vorhandenen gezogen. Aus diesem Grund ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit die übrigen drei Karten des Royal Flush in den Community–Cards vorzufinden:

$$P(\text{Royal Flush: Community–Cards}) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{48}{5}}$$

Nun können die Ergebnisse zusammengefügt werden:

$$P(\text{Royal Flush}) = 4 \cdot \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{47}{2}}{\binom{52}{4}} \cdot \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{48}{5}} \approx 0.00009235$$

Wenn man dieses Ergebnis mit dem von Texas Hold'em ($\approx 0,00003232$) vergleicht, sieht man, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Royal Flush bei Omaha Hold'em größer ist. Dies gilt größtenteils für alle Kombinationen. Nur beim Pair ist die Wahrscheinlichkeit bei Texas Hold'em größer, was eine logische Konsequenz der Tatsache ist, dass sich bei neun Karten unwahrscheinlicher nur ein Paar ziehen lässt, da sich zahlreiche Kombinationsmöglichkeiten ergeben. Der Unterschied der Wahrscheinlichkeiten von Texas Hold'em und Omaha Hold'em wird aber stets geringer.[3]

5.2.2 Omaha/8

Besonders beliebt ist Omaha/8 oder 8–or–Better–High–Low Split Poker, da es die aufregendste Pokervariante ist. Hierbei geht nur der halbe Pot an den Spieler mit den besten fünf Karten, die nach denselben Regeln wie bei Omaha Hold'em gebildet werden können. Die andere Hälfte bekommt jener, der die schlechtesten fünf Karten besitzt. Dabei zählen, wie bei A–5 Triple Draw, keine Flushs oder Straights und das Ass hat stets den Wert 1. Zusätzlich darf jede Karte höchstens den Wert 8 besitzen. Es dürfen also nur Karten von A–8 zur Bildung der schlechtesten Hand verwendet werden. Es kann natürlich auch vorkommen, dass ein Spieler zugleich das beste und das schlechteste Blatt in der Hand hält. Dies kann leicht passieren, wenn er einen niedrigen Flush, wie zum Beispiel $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ besitzt.

Wenn es keinem Spieler gelingt sich für den Low–Pot zu bewerben, falls also jeder höhere Werte als 8 unter seinen Kartenkombinationen hat, geht der gesamte Pot an den Spieler mit der besten Hand. Der Pot wird selbstverständlich geteilt, falls es mehrere Gewinner gibt.

[3]siehe: Gamblingplanet.org (2011): Online Poker–Omaha–Wahrscheinlichkeiten. www.gamblingplanet.org/de/Omaha-Wahrscheinlichkeiten, (20.02.2011).

Kapitel 6

Stud Poker

Es existieren zahlreiche Pokervarianten, deren Aufzählung alleine den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Obwohl die wichtigsten beiden, Draw Poker und Hold'em Poker, bereits ausführlich behandelt wurden, gibt es noch drei Varianten, die eine nähere Betrachtung verdienen. Diese drei Pokervarianten gehören zur Familie des Stud Poker und nennen sich Five Card Stud, Seven Card Stud und Tropical Stud.

Stud Poker ist eng mit Hold'em Poker verwandt. Es gibt auch hier offene und verdeckte Karten. Im Unterschied zum Hold'em Poker erhält beim Stud Poker jeder Spieler seine eigenen offenen Karten, es handelt sich demnach um keine Gemeinschaftskarten mehr.

6.1 Five Card Stud

Vor Spielbeginn, also noch bevor der Dealer die Karten verteilt, müssen alle Spieler ein Ante in den Pot einzahlen. Anschließend erhält jeder Spieler eine verdeckte und eine offene Karte, die vor ihm auf den Tisch gelegt wird. Der Spieler, dessen offene Karte den geringsten Wert besitzt, hat die erste Wettrunde zu eröffnen. Falls der Wert mehrerer Karten derselbe ist, so entscheidet die Farbe der Karte, wobei nach dem Rang der Farben entschieden wird, beginnend bei der besten: $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$. Es darf in dieser und auch in jeder weiteren Wettrunde höchstens drei Mal erhöht werden, es sei denn es befinden sich nur noch zwei Spieler im Spiel. Dann gilt diese Regel nicht, es darf also so lange erhöht werden, bis ein Spieler mitgeht (call) oder aufgibt (fold).

Nach der ersten Wettrunde teilt der Dealer jedem Spieler eine neue offene Karte aus. Die zweite Wettrunde eröffnet nun jener Spieler, dessen neu erhaltene Karte den höchsten Wert besitzt. Das Spielverhalten (raise, call, fold etc.) folgt denselben Regeln wie Draw Poker oder Hold'em Poker. Die letzten beiden Runden werden jeweils von jenem Spieler eröffnet, dessen offene Karten die beste Kombination bilden. Nach der vierten Wettrunde hat also jeder Spieler, der noch nicht ausgestiegen ist, eine verdeckte Karte in der Hand und vier offene Karten vor sich auf dem Tisch liegen. Es kommt zum Showdown, wobei der Spieler mit der besten Kartenkombination den Pot gewinnt.

Bei Five Card Stud erhält ein Spieler insgesamt fünf Karten. Aus diesem Grund besitzen die Kartenkombinationen dieselben Wahrscheinlichkeiten wie bei Five Card Draw. Da aber vier der fünf Karten eines Spielers offen auf dem Tisch liegen, muss man auch gute Blätter vorsichtig spielen, da die Gegner den Großteil der Karten kennen. Somit ist auch bluffen schwieriger.

6.2 Seven Card Stud

Seven Card Stud ist die bekannteste Pokervariante der Stud Poker Familie und wird in Casinos und auf Turnieren gespielt.

Die Regeln sind im Prinzip die gleichen wie bei Five Card Stud, jedoch teilt der Dealer vor der ersten Wettrunde jedem Spieler zwei verdeckte Karten und eine offene aus. Anschließend verläuft das Spiel analog zu Five Card Stud, bis nach der vierten Wettrunde. Noch vor dem Showdown wird eine siebte Karte verdeckt an alle Spieler, die noch nicht ausgestiegen sind, ausgeteilt. Erst nach einer weiteren fünften Wettrunde kommt es zum Showdown.

Da es sich bei Seven Card Stud um eine Ziehung von sieben aus insgesamt 52 Karten handelt, können die Wahrscheinlichkeiten analog zu Texas Hold'em berechnet werden.

6.3 Tropical Stud

Tropical Stud ist eine sehr exotische Pokervariante. Hier spielen nämlich alle Spieler gegen den Dealer (Croupier), ähnlich wie bei Black Jack. Aus diesem Grund eignet sich dieses Spiel besonders gut für das Casino.

Bevor das Spiel beginnt muss jeder Spieler ein Ante einzahlen. Die Chips werden jedoch nicht in einen Pot zusammengeworfen, sondern jeder Spieler hat seinen eigenen Pot vor sich liegen. In den meisten Casinos gibt es pro Spielerplatz zwei mit den Begriffen „Ante“ und „Bet“ gekennzeichnete Felder. Jeder Spieler kann selbst entscheiden wie viele Chips er als Ante einsetzen möchte. Es gibt allerdings ein Minimal– und ein Maximalgebot. Anschließend teilt der Croupier jedem Spieler verdeckt fünf Karten aus. Auch sich selbst gibt er fünf Karten, von denen aber eine offen vor ihm auf den Tisch gelegt wird. Jeder Spieler kann nun entscheiden, ob er aussteigt (fold) oder wettet (bet). Wenn ein Spieler wetten will, muss er das Doppelte seines Antes auf das Feld „Bet“ legen. Falls er allerdings aussteigen will, geht der Betrag seines erbrachten Antes an die Bank. Anschließend folgt eine Tauschrunde. Es darf jeweils eine Karte beim Croupier ausgetauscht werden, allerdings nur gegen Bezahlung eines Betrages in Höhe des Antes. Dieser Betrag wird nicht in den Pot geworfen, sondern gehört der Bank. Es steht natürlich auch jedem frei seine Karten zu behalten. Nun hat der Croupier seine restlichen vier Karten aufzudecken. Hat sein Blatt nicht zumindest den Wert der Pokerkombination Ass–König, scheidet er aus. Alle Spieler, die noch nicht ausgestiegen sind, erhalten einen Gewinn in Höhe ihres Antes und dürfen ihre gesetzten Chips behalten. Besitzt der Croupier aber ein solches Blatt, müssen auch die Spieler ihre Karten aufdecken. Hat ein Spieler ein schlechteres Blatt als der Croupier, gehen alle gesetzten Chips an die Bank. Hat ein Spieler aber ein besseres Blatt, so bekommt er die Höhe des Antes als Gewinn. Außerdem erhält er, abhängig von seiner Kartenkombination, einen Gewinnbetrag für die Chips, die er zusätzlich zum Ante gesetzt hat. In der folgenden Tabelle sind die Verhältnisse von Auszahlung und Einsatz (ohne Ante) aufgelistet. Falls ein Spieler dasselbe Blatt (genau die gleichen Karten) wie der Croupier hat, bekommt er seine Chips zurück, erhält jedoch keinen Gewinn.

Kombination	Auszahlung
Royal Flush	100:1
Straight Flush	50:1
Four of a Kind	20:1
Full House	7:1
Flush	5:1
Straight	4:1
Three of a Kind	3:1
Two Pair	2:1
Pair / A–K	1:1

Da wiederum fünf Karten aus insgesamt 52 gezogen werden sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kartenkombination dieselben wie bei Five Card Draw. Wenn der Croupier aber eine schlechtere Kartenkombination als A–K in den Händen hält, gewinnt der Spieler unabhängig von seinem Blatt.

Wie groß ist aber die Wahrscheinlichkeit, dass der Croupier aus dem Spiel aussteigen muss und der Spieler somit automatisch sein Ante als Gewinn erhält?

Croupier muss aussteigen:

Damit das Blatt des Croupiers schlechter als ein Blatt der Kombination A–K ist, darf kein Paar oder eine bessere Kombination gezogen werden. Man kann also die Wahrscheinlichkeit für High Card zu Hilfe nehmen. Diese beträgt $0,5011774$. Davon muss noch die Wahrscheinlichkeit das Blatt A–K zu erhalten abgezogen werden.

Wenn das Blatt A–K gezogen werden soll, müssen die übrigen drei Karten unterschiedliche und von A und K verschiedene Werte besitzen. Diese drei Werte können also noch aus den restlichen elf gezogen werden. Allerdings ist unter diesen Möglichkeiten auch eine Straße: $\{T, J, Q, K, A\}$. Diese muss noch abgezogen werden:
$\binom{11}{3} - 1$

Alle fünf Karten können jede beliebige der vier Farben annehmen. Die vier Möglichkeiten daraus einen Flush zu bilden (in den Farben $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\diamondsuit$ und $\clubsuit$) müssen aber abgezogen werden. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, muss schließlich noch durch $\binom{52}{5}$ dividiert werden.

Somit erhält man für die Wahrscheinlichkeit das Blatt A–K zu ziehen:

$$P(A\text{–}K) = \frac{\left(\binom{11}{3} - 1\right) \cdot (4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx 0,06436421$$

Um nun die Wahrscheinlichkeit dafür zu erhalten, dass der Croupier aus dem Spiel aussteigen muss, wird diese Wahrscheinlichkeit von der Wahrscheinlichkeit für „High Card“ subtrahiert.

Insgesamt kommt man auf das Ergebnis:

$$P(\text{Croupier muss aussteigen}) = P(\text{High Card}) - P(A\text{–}K) \approx$$
$$\approx 0,5011774 - 0,06436421 = 0.43681319$$

Wie man sieht, liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Croupier aussteigen muss, bei unter 50 Prozent. Das ist für ein Casino essentiell, da es immer einen Vorteil gegenüber den Spielern haben muss, um Gewinn zu machen.

Angenommen ein Spieler spielt um ein Ante in der Höhe von x Euro. In der Wettrunde setzt er einen Betrag von $2x$. Er entschließt sich keine Karte zu tauschen. Wie hoch ist nun der zu erwartende Gewinn für diesen Spieler?

Erwartungswert

Im Folgenden wird der Fall, dass sowohl der Spieler als auch der Croupier die gleiche Pokerkombination besitzen, nicht beachtet. Wenn beide zum Beispiel ein Paar in der Hand halten, würde derjenige mit dem besseren Paar gewinnen, wenn beide dasselbe Paar besitzen, würde derjenige mit der höchsten zusätzlichen Karte gewinnen. Falls aber alle Kartenwerte ident sind, gewinnt niemand und der Spieler erhält seine gesetzten Chips zurück. Um diese Situation zu vereinfachen, wird angenommen, dass der Gewinn gleich null ist, falls der Spieler und der Croupier die gleiche Kartenkombination besitzen. Dadurch erhält man aber eine minimale Abweichung vom echten Erwartungswert.

Zur Berechnung des Erwartungswerts muss jeweils die Wahrscheinlichkeit mit dem dazu gehörigen Gewinn multipliziert werden, um die Einzelergebnisse anschließend zu addieren:
$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

Wenn das Blatt des Croupiers nicht zumindest den Wert A–K besitzt, gewinnt der Spieler den Betrag des Antes.
$0,43681319 \cdot x$.

Hat der Croupier ein Blatt mit der Kombination A–K, so gewinnt der Spieler sowohl den Wert des Antes als auch einen zusätzlichen Betrag, der abhängig von seiner Kartenkombination ist. Womit der Wettbetrag jeweils multipliziert werden muss, wurde in der obigen Tabelle bereits aufgelistet. Wenn der Spieler zum Beispiel einen Royal Flush in den Händen hält, gewinnt er $x + 2x \cdot 100 = 201x$ Euro. Den Gewinn für jede einzelne Kombination ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Kombination	Wahrscheinlichkeit	Auszahlung
Royal Flush	0,00000154	201x
Straight Flush	0,00001385	101x
Four of a Kind	0,00024010	41x
Full House	0,00144058	15x
Flush	0,00196540	11x
Straight	0,00392465	9x
Three of a Kind	0,02112845	7x
Two Pair	0,04753902	5x
Pair	0,42256903	3x
A–K	0,06436421	3x

Hier wird angenommen, dass der zu erwartende Gewinn gleich null ist, falls beide, Croupier und Spieler, die gleiche Kartenkombination gezogen haben.

Hat der Croupier ein Blatt mit der Kombination A–K, so ist der Erwartungswert für den Spieler:

$$\begin{aligned}\mu_{A\text{–}K} = {} & P(\text{Royal Flush}) \cdot 201x + P(\text{Straight Flush}) \cdot 101x + ... + P(\text{Pair}) \cdot 3x + \\ & +P(A\text{–}K) \cdot 0x + P(\text{keine Kombination}) \cdot (-3x) \approx \\ & \approx 0,00000154 \cdot 201x + 0,00001385 \cdot 101x + 0,0002401 \cdot 41x + \\ & +0,00144058 \cdot 15x + 0,0019654 \cdot 11x + 0,00392465 \cdot 9x + \\ & +0,02112845 \cdot 7x + 0,04753902 \cdot 5x + 0,42256903 \cdot 3x + \\ & +0,06436421 \cdot 0x + 0,43681319 \cdot (-3x) = 0,43296421 \cdot x\end{aligned}$$

Hat der Croupier allerdings ein Paar, ist der zu erwartende Gewinn des Spielers folgendermaßen zu berechnen:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{Paar}} = {} & 0,00000154 \cdot 201x + 0,00001385 \cdot 101x + 0,0002401 \cdot 41x + \\ & +0,00144058 \cdot 15x + 0,0019654 \cdot 11x + 0,00392465 \cdot 9x + \\ & +0,02112845 \cdot 7x + 0,04753902 \cdot 5x + 0,42256903 \cdot 0x + \\ & +0,5011774 \cdot (-3x) = -1,02783551 \cdot x\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise können die zu erwartenden Gewinne für die übrigen Blätter des Croupiers berechnet werden. Alle Ergebnisse werden in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Blatt des Croupiers	Wahrscheinlichkeit	zu erwartender Gewinn des Spielers
Royal Flush	0,00000154	-2,99999544x
Straight Flush	0,00001385	-2,99964435x
Four of a Kind	0,00024010	-2,99752520x
Full House	0,00144058	-2,98335936x
Flush	0,00196540	-2,95585446x
Straight	0,00392465	-2,92246111x
Three of a Kind	0,02112845	-2,82375391x
Two Pair	0,04753902	-2,53323770x
Pair	0,42256903	-1,02783551x
A–K	0,06436421	0,43296421x
keine Kombination	0.43681319	1x

Um den Erwartungswert zu berechnen, müssen noch die Wahrscheinlichkeiten für eine bestimmte Kombination mit dem jeweiligen zu erwartenden Gewinn des Spielers multipliziert werden. Insgesamt erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) =&0,00000154 \cdot (-2,99999544x) + 0,00001385 \cdot (-2,99964435x)+\\ &+0,0002401 \cdot (-2,9975252x) + 0,00144058 \cdot (-2,98335936x)+\\ &+0,0019654 \cdot (-2,95585446x) + 0,00392465 \cdot (-2,92246111x)+\\ &+0,02112845 \cdot (-2,82375391x) + 0,04753902 \cdot (-2,5332377x)+\\ &+0,42256903 \cdot (-1,02783551x) + 0,06436421 \cdot (0,43296421x)+\\ &+0.43681319 \cdot x = -0,172082758 \cdot x\end{aligned}$$

Der Erwartungswert für den Spieler ist also negativ, wie üblich für ein Spiel, das im Casino angeboten wird. Mit Hilfe des Erwartungswertes kann außerdem eine Aussage über die Höhe des Verlustes gemacht werden. Je öfter gespielt wird, desto mehr nähert sich der Verlust 17,2 Prozent des Einsatzes an.

Kapitel 7

Betrachtungen zum Spielverlauf

In diesem Kapitel sollen bestimmte Spielsituationen der beiden bekanntesten Pokervarianten (Five Card Draw und Texas Hold'em) näher betrachtet werden.

7.1 Spielsituationen bei Five Card Draw

Die Wahrscheinlichkeiten, ein bestimmtes Blatt beim ersten Austeilen zu erhalten wurde bereits berechnet. Nun stellt sich allerdings die Frage, wie sich diese Wahrscheinlichkeiten verändern, wenn die Möglichkeit eines Tausches besteht. Dies soll anhand bestimmter Blätter überprüft werden. Außerdem wird verglichen, wie viele Karten getauscht werden sollten, damit die Spielweise optimal wird.

Weiters wird der Frage, ob die Anzahl der Spieler ausschlaggebend für den Gewinn ist, nachgegangen. Es wurde bereits erwähnt, dass die Spieleranzahl für die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Blatt ausgeteilt zu bekommen nicht zu beachten ist. Allerdings lässt sich vermuten, dass es einfacher ist mit einer bestimmten Pokerkombination gegen einen Gegner zu gewinnen, als gegen vier, da es weniger Blätter gibt, die es zu schlagen gilt. Auch diese Frage soll mit Hilfe von Beispielkombinationen beantwortet werden.

7.1.1 Tausch

Im Folgenden werden Starthände, anhand derer das Tauschverhalten überprüft werden soll, betrachtet. Es handelt sich dabei um Starthände, die ein Spieler auf jeden Fall spielen sollte. Es werden keine zusätzlichen Spieler beachtet. Manchmal kommt es vor, dass ein anderer Spieler die Karte, die zur Vervollständigung eines Blattes benötigt wird, in den Händen hält. Diese Karte kann dann nicht mehr gezogen werden. Diese Situation wird hier außer Acht gelassen.

1. Beispiel: $\{2, 9, T, J, Q\}$
Angenommen ein Spieler hat die Kartenkombination $\{2, 9, T, J, Q\}$, wobei die Farben vorerst nicht beachtet werden. Die Möglichkeit für eine Straße ist gegeben. Der Spieler wird die Karte mit dem Wert 2 eintauschen und hoffen, dass er eine Karte des Wertes K oder 8 bekommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit diese Starthand zu einem Straight zu machen?

Spieler bekommt ein Straight:

Damit dieses Startblatt zu einem Straight wird, benötigt der Spieler entweder eine Karte mit dem Wert A oder eine mit dem Wert 9. Da die Farbe dabei nicht von Bedeutung ist, gibt es acht mögliche Karten, die das Blatt zu einem Straight machen. Insgesamt gibt es noch 47 Karten. Somit lautet die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Straight (1)}) = \frac{8}{47} \approx 0,17021277$$

Falls der Spieler die Karten der Straße in derselben Farbe hat, zum Beispiel $\{2\diamondsuit, 9\spadesuit, T\spadesuit, J\spadesuit, Q\spadesuit\}$, hat er die Chance auf ein Straight, einen Flush oder einen Straight Flush. Alle drei wären ziemlich sicher gewinnbringende Kombinationen.

Spieler bekommt ein Straight, einen Flush oder einen Straight Flush:

Für einen Straight Flush gibt es nur zwei Möglichkeiten, der Spieler erhält die Karte $K\spadesuit$ oder die Karte $8\spadesuit$. Die übrigen sechs Karten mit den Werten K und 8 liefern ein Straight, während die übrigen elf Karten der Farbe Pik einen Flush liefern. Alle diese Ereignisse schließen sich

gegenseitig aus, dürfen also addiert werden.
Die Wahrscheinlichkeit auf ein Straight, einen Flush oder einen Straight Flush lautet demnach:

$$P(\text{Straight, einen Flush oder einen Straight Flush}) = \frac{6}{47} + \frac{11}{47} + \frac{2}{47} =$$
$$= \frac{19}{47} \approx 0,40425532$$

Die Wahrscheinlichkeit mit einem solchen Blatt zu gewinnen ist also relativ hoch. Es fällt auf, dass bei diesem Beispiel die Wahrscheinlichkeit für einen Flush höher ist als für ein Straight, obwohl es in allgemeiner Form genau umgekehrt ist.

2. Beispiel: $\{Q, Q, K, T, 6\}$
Angenommen der Spieler hat folgendes Blatt: $\{Q, Q, K, T, 6\}$. Die Möglichkeit für einen Flush ist nicht gegeben. Das Blatt ließe sich allerdings zu zwei Paaren, einem Drilling, einer Straße, einem Full House oder einem Vierling vervollständigen.

Wenn ein Spieler auf eine Straße hofft, wird er die Karten mit den Werten Q und 6 tauschen. Auch dann ist noch die Möglichkeit gegeben ein Paar, zwei Paar oder einen Drilling zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit mit einem Paar zu gewinnen ist allerdings nicht sehr hoch, daher werden diese Kombinationen hier nicht berücksichtigt.

Spieler tauscht Q und 6:

Für die Kombination Two Pair muss der Spieler entweder Q und K ziehen, Q und T oder K und T. Dabei ist zu beachten, dass die Ziehung von Q und K von der Ziehung von K und Q unterschieden werden muss. Die Reihenfolge ist von Bedeutung. Im Stapel befinden sich noch zwei Damen, drei Könige und drei Zehner. Die Wahrscheinlichkeit zwei Paare zu erhalten ist demnach:

$$P(\text{Two Pair (2.1)}) = 2 \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{3}{46} + 2 \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{3}{46} + 2 \cdot \frac{3}{47} \cdot \frac{3}{46} \approx 0,01942646$$

Um die Kombination Three of a Kind zu erhalten, benötigt der Spieler zwei Damen, zwei Könige oder zwei Zehner. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

$$P(\text{Three of a Kind (2.1)}) = \frac{2}{47} \cdot \frac{1}{46} + \frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46} + \frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46} \approx 0,00647549$$

Schließlich kann der Spieler auch die gewünschte Straße erhalten. Dafür muss er entweder Karten mit den Werten A und J ziehen oder mit den Werten J und 9. Eine Straße erhält man also mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Straight (2.1)}) = 2 \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{4}{46} + 2 \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{4}{46} = 0,02960222$$

Nun lässt sich berechnen mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spieler ein Blatt erhält, mit dem es sich lohnt weiterzuspielen, wenn er Q und 6 tauscht:

$$\begin{aligned} &P(\text{gutes Blatt beim Tausch von } Q \text{ und } 6) = P(\text{Two Pair (2.1)}) + \\ &+ P(\text{Three of a Kind (2.1)}) + P(\text{Straight (2.1)}) \approx \\ &\approx 0,01942646 + 0,00647549 + 0,02960222 = 0,05550417 \end{aligned}$$

Darüber hinaus könnte sich der Spieler auch entscheiden die Karten mit den Werten 6 und T zu tauschen, weil diese den geringsten Wert besitzen. In diesem Fall hat der Spieler die Möglichkeit zwei Paar, einen Drilling, ein Full House oder einen Vierling zu erhalten. Nur die Karte mit dem Wert 6 zu tauschen, bringt keine Aussichten auf Erfolg.

Spieler tauscht 6 und T:

Um nach dem Tausch zwei Paare in der Hand zu haben, muss entweder ein König (drei Karten) und ein unterschiedlicher Kartenwert, also keine Dame und kein König (42 Karten), gezogen werden, oder ein Paar. Wenn ein Paar gezogen werden soll, muss zwischen den Werten 6 und T, von denen es nur noch jeweils drei Stück gibt, und den übrigen Werten unterschieden werden. Es gibt 36 Karten, die keinen der Werte 6, T, Q oder K besitzen. Somit erhält man:

$$P(\text{Two Pair (2.2)}) = 2 \cdot \frac{3}{47} \cdot \frac{42}{46} + 2 \cdot \frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46} + \frac{36}{47} \cdot \frac{3}{46} \approx 0,17206291$$

Damit der Spieler einen Drilling erhält, muss er eine Dame ziehen und eine Karte mit einem von K und D verschiedenen Kartenwert. Andernfalls würde ein Full House entstehen, das nicht in diese Kategorie eingeordnet wird.

$$P(\text{Three of a Kind (2.2)}) = 2 \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{42}{46} \approx 0,07770583$$

Der Spieler kann durch den Tausch aber auch ein Full House erhalten. Dazu muss er entweder eine Dame und einen König ziehen oder zwei Könige.

$$P(\text{Full House (2.2)}) = 2 \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{3}{46} + \frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46} \approx 0,00832562$$

Die letzte Möglichkeit ist das Ziehen eines Vierlings. Hierfür muss der Spieler allerdings zwei Damen ziehen, eine andere Möglichkeit gibt es nicht.

$$P(\text{Four of a Kind (2.2)}) = \frac{2}{47} \cdot \frac{1}{46} \approx 0.00092507$$

Somit kann man sich die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, dass ein Spieler ein gutes Blatt erhält, wenn er die Karten 6 und T tauscht indem man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten addiert:

$$\begin{aligned} &P(\text{gutes Blatt beim Tausch von 6 und } T) = P(\text{Two Pair (2.2)}) + \\ &+ P(\text{Three of a Kind (2.2)}) + (\text{Full House (2.2)}) + P(\text{Four of a Kind (2.2)}) \approx \\ &\approx 0,17206291 + 0,07770583 + 0,00832562 + 0.00092507 = 0,25901943 \end{aligned}$$

Die letzte Möglichkeit, und vermutlich auch diejenige, welche die meisten Spieler intuitiv bevorzugen würden, ist das Tauschen der Karten mit den Werten 6, T und K. Auch in diesem Fall sind folgende gute Kartenkombinationen möglich: zwei Paar, Drilling, Full House oder Vierling.

Spieler tauscht 6, T und K:

Für die Möglichkeit zwei Paare zu bekommen, braucht ein Spieler noch ein zusätzliches Paar und eine Karte von unterschiedlichem Wert. Das zweite Paar kann die Werte 6, T oder K besitzen, von denen es jeweils noch drei Karten gibt. Es kann aber auch einen der noch nicht aufgetretenen Werte annehmen. Die letzte Karte muss einen von beiden Paaren verschiedenen Wert besitzen. Die Reihenfolge muss allerdings noch beachtet werden. Für die Anordnung der letzten Karte gibt es $\binom{3}{1}$ Möglichkeiten.

$$P(\text{Two Pair (2.3)}) = 3 \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46} \cdot \frac{42}{45} + \binom{3}{1} \cdot \frac{36}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{41}{45} \approx 0,15985199$$

Die einzige Möglichkeit einen Drilling zu bekommen ist die, dass noch eine Dame und zwei Karten mit unterschiedlichem Wert gezogen werden.

$$\begin{aligned} P(\text{Three of a Kind (2.3)}) =& 3 \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{42}{45} + \binom{3}{1} \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{36}{46} \cdot \frac{41}{45} \approx \\ \approx& 0,11433858 \end{aligned}$$

Ein Full House kann auf zwei Arten entstehen. Entweder eine Dame und ein Paar oder ein Drilling wird gezogen. Es muss wieder unterschieden werden, ob die Karten den Wert K, T oder 6 haben oder nicht.

$$\begin{aligned} P(\text{Full House (2.3)}) =& 3 \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} + \binom{3}{1} \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{36}{46} \cdot \frac{3}{45} + \\ &+ 3 \cdot \frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46} \cdot \frac{1}{45} + \frac{36}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \approx 0,01017576 \end{aligned}$$

Schließlich kann auch ein Vierling gezogen werden. Dafür muss der Spieler zwei Damen erhalten. Die letzte Karte ist völlig beliebig zu wählen.

$$P(\text{Four of a Kind (2.3)}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{1}{46} \cdot 1 \approx 0,00277521$$

Nun kann die Wahrscheinlichkeit für ein gutes Blatt beim Tausch der Karten mit den Werten K, T und 6 berechnet werden:

$$\begin{aligned} P(\text{gutes Blatt beim Tausch von } K, T \text{ und } 6) = P(\text{Two Pair (2.3)}) + \\ P(\text{Drilling (2.3)}) + P(\text{Full House (2.3)}) + P(\text{Four of a Kind (2.3)}) \approx \\ \approx 0,15985199 + 0,11433858 + 0,01017576 + 0,00277521 = 0,28714154 \end{aligned}$$

Die größte Wahrscheinlichkeit ein gutes Blatt (mindestens zwei Paar) zu bekommen – rund 28,7 Prozent – hat ein Spieler also dann, wenn die drei Karten von unterschiedlichem Wert getauscht werden.

7.1.2 Anzahl der Spieler

An einem Pokerspiel können unterschiedlich viele Spieler teilnehmen. Es stellt sich die Frage, ob die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen von der Spieleranzahl abhängig ist. Da es bei mehr Spielern auch mehr Möglichkeiten gibt, dass ein Gegner ein besseres Blatt besitzt, ist es leicht einzusehen, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen bei wachsender Spieleranzahl abnimmt.

Angenommen zwei Spieler pokern gegeneinander, wobei ein Spieler das Blatt $\{A\spadesuit, A\heartsuit, J\heartsuit, 5\diamondsuit, 2\clubsuit\}$ erhält. Die Möglichkeit einer Tauschrunde ist nicht gegeben. Damit dieser Spieler gewinnt, muss der andere ein schlechteres Blatt besitzen. Dazu zählen: keine Kombination, ein Paar von kleinerem Wert als A, ein Ass–Paar, wobei die übrigen drei Karten einen niedrigeren Wert als J besitzen müssen, oder ein Ass–Paar mit einem Buben, wobei die anderen beiden Karten von kleinerem Wert als 5 sein müssen.

Gewinnwahrscheinlichkeit bei zwei Spielern:

Einige Vorbemerkungen sollen helfen die Übersicht zu behalten.
Da bereits fünf Karten bekannt sind (das Blatt des ersten Spielers), besteht das Kartendeck nur noch aus 47 Karten. Von diesen existieren nur noch jeweils drei Karten mit den Werten $J, 5$ oder 2 (Menge Y). Von dem Wert A sind nur noch zwei Karten vorhanden. Demnach gibt es neun Werte, von denen es noch je vier Karten gibt (Menge X).
$X = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, T, Q, K\}$.
$Y = \{2, 5, J\}$.

Pair von 2–K
Das Paar kann entweder aus der Menge X oder aus der Menge Y gezogen werden.
Wenn es aus der ersten Menge stammt, gibt es neun Werte, die das Paar annehmen kann. Diese zwei Karten können zwei der vier möglichen Farben annehmen: $\binom{9}{1} \cdot \binom{4}{2}$.

Die übrigen drei Karten können entweder aus der nun nur noch aus acht Elementen bestehenden Menge der noch nicht verwendeten Kartenwerte $(X-1)$ gezogen werden (jede Karte kann vier Farben annehmen) oder aus der Menge Y (nur noch drei Farben pro Karte). Die drei Karten können aber auch den Wert A (zwei Farben) beinhalten.

Alle drei Karten werden aus $(X-1)$ gezogen: $\binom{8}{3} \cdot 4^3$.

Zwei Karten aus $(X-1)$ und eine aus Y: $\binom{8}{2} \cdot 4^2 \cdot \binom{3}{1} \cdot 3$.

Eine Karte aus $(X-1)$ und zwei aus Y: $\binom{8}{1} \cdot 4 \cdot \binom{3}{2} \cdot 3^2$.

Alle drei Karten aus Y: $\binom{3}{3} \cdot 3^3$.

Zwei Karten aus $(X-1)$ und ein Ass: $\binom{8}{2} \cdot 4^2 \cdot 1 \cdot 2$.

Eine Karte aus $(X-1)$, eine Karte aus Y und ein Ass: $\binom{8}{1} \cdot 4 \cdot \binom{3}{1} \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2$.

Zwei Karten aus Y und ein Ass: $\binom{3}{2} \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot 2$.

Der Wert des Paares kann aber auch aus der Menge Y stammen. Dann können die Farben der beiden Karten aus einer 3–elementigen Menge gezogen werden: $\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2}$.

Die übrigen drei Karten können demnach aus der Menge X (jede Karte kann vier Farben annehmen) oder aus der Menge $(Y-1)$, wobei noch drei Farben zur Verfügung stehen, gezogen werden. Außerdem kann ein Ass gezogen werden, welches noch zwei Farben annehmen kann.

Alle drei Karten werden aus der Menge X gezogen: $\binom{9}{3} \cdot 4^3$.

Zwei Karten kommen aus X und eine aus $(Y-1)$: $\binom{9}{2} \cdot 4^2 \cdot \binom{2}{1} \cdot 3$.

Eine Karte aus X und zwei Karten aus $(Y-1)$: $\binom{9}{1} \cdot 4 \cdot \binom{2}{2} \cdot 3^2$.

Zwei Karten aus X und ein Ass: $\binom{9}{2} \cdot 4^2 \cdot 1 \cdot 2$.

Eine Karte aus X, eine Karte aus $(Y-1)$ und ein Ass: $\binom{9}{1} \cdot 4 \cdot \binom{2}{1} \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2$.

Zwei Karten aus $(Y-1)$ und ein Ass: $\binom{2}{2} \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot 2$.

Diese Überlegungen können nun alle addiert werden. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass der zweite Spieler ein Paar von kleinerem Wert als A besitzt, muss das Ergebnis noch durch $\binom{47}{5}$ dividiert werden. Insgesamt erhält man demnach:

$$P(\text{Pair }(2\text{–}K)) = \frac{\binom{9}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\left(\binom{8}{3}\cdot 4^3+\binom{8}{2}\cdot 4^2\cdot\binom{3}{1}\cdot 3+\binom{8}{1}\cdot 4\cdot\binom{3}{2}\cdot 3^2\right)}{\binom{47}{5}}+$$

$$+\frac{\binom{9}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\left(\binom{3}{3}\cdot 3^3+\binom{8}{2}\cdot 4^2\cdot 1\cdot 2+\binom{8}{1}\cdot 4\cdot\binom{3}{1}\cdot 3\cdot 1\cdot 2+\binom{3}{2}\cdot 3^2\cdot 1\cdot 2\right)}{\binom{47}{5}}+$$

$$+\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\left(\binom{9}{3}\cdot 4^3+\binom{9}{2}\cdot 4^2\cdot\binom{2}{1}\cdot 3+\binom{9}{1}\cdot 4\cdot\binom{2}{2}\cdot 3^2+\binom{9}{2}\cdot 4^2\cdot 1\cdot 2\right)}{\binom{47}{5}}+$$

$$+\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\left(\binom{9}{1}\cdot 4\cdot\binom{2}{1}\cdot 3\cdot 1\cdot 2+\binom{2}{2}\cdot 3^2\cdot 1\cdot 2\right)}{\binom{47}{5}} \approx 0,41631642$$

Pair mit A und drei Karten $< J$:
Um ein solches Blatt zu erhalten, benötigt der Spieler auf jeden Fall die beiden noch vorhandenen Ass-Karten. Die übrigen drei Karten können entweder aus der Menge $\{3,4,6,7,8,9,T\}$, von denen jede Karte noch in vier Farben vorhanden ist, oder aus der Menge $\{2,5\}$, die nur noch drei Farben annehmen können, gezogen werden.

Aus der 7–elementigen Menge können drei, zwei oder bloß eine Karte gezogen werden. Abhängig davon müssen von der 2–elementigen Menge die restlichen Karten gezogen werden, also eine, zwei oder drei.

Alle drei Möglichkeiten addiert und durch $\binom{47}{5}$ dividiert, ergeben die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zweite Spieler ein Ass–Paar und drei Karten von geringerem Wert als J erhält.

$$P(AA \text{ und drei Karten } < J) = \frac{\binom{7}{3}\cdot 4^3+\binom{7}{2}\cdot 4^2\cdot\binom{2}{1}\cdot 3}{\binom{47}{5}}+$$

$$+\frac{\binom{7}{1}\cdot 4\cdot\binom{2}{2}\cdot 3^2}{\binom{47}{5}} \approx 0,00293884$$

Pair mit A, eine Karte mit Wert J und zwei Karten < 5:
Um ein solches Blatt zu erhalten, müssen die beiden Ass–Karten gezogen werden, einer der drei noch vorhandenen Buben und zwei Karten aus der Menge $\{2,3,4\}$. Karten vom Wert 2 sind allerdings nur noch drei Stück vorhanden. Demnach kann entweder der Wert 3 und der Wert 4 (jeweils in vier Farben) gezogen werden, oder einer dieser beiden und zusätzlich noch der Wert 2 (in drei Farben).

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Spieler ein Ass–Paar, einen Buben und zwei Karten von geringerem Wert als 5 zieht:

$$P(AAJ \text{ und zwei Karten } < 5) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \left(\binom{2}{2} \cdot 4^2 + \binom{2}{1} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3\right)}{\binom{47}{5}} \approx$$
$$\approx 0,0000782$$

keine Kombination:
Es müssen fünf Karten gezogen werden, ohne dass sich daraus eine Pokerkombination zusammenstellen lässt. Diese Karten können entweder aus der Menge X, der noch nicht vorgekommenen Werte stammen, aus der Menge Y oder es wird ein Ass gezogen. Die Werte aus der Menge X sind noch in vier Farben vorhanden, die Werte aus Y noch in drei Farben und ein Ass kann in zwei Farben gezogen werden. Es muss außerdem die Anzahl der möglichen Straßen und Flushs abgezogen werden. Diese Anzahl ist jedoch von den Kartenwerten abhängig. Um das Abzählen zu vereinfachen, werden in der nachfolgenden Auflistung aller Werte diejenigen, die noch in drei Farben vorhanden sind, blau geschrieben und der Wert A, den es noch in zwei Farben gibt, rot:

$A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, J, Q, K, A$

Die nicht mehr vollständig erhaltenen Werte $2, 5, J, A$ können in verschiedenen Farben gezogen werden, was später noch von Bedeutung sein wird:

Wert	vorhandene Farben
A	♢, ♣
2	♠, ♡, ♢
5	♠, ♡, ♣
J	♠, ♢, ♣

Wenn alle fünf Karten aus der Menge X stammen, gibt es eine mögliche Straße ($\{6, 7, 8, 9, T\}$) und vier mögliche Flushs (alle Farben):

$$\left(\binom{9}{5} - 1\right) \cdot (4^5 - 4)$$

Falls vier Karten aus X und eine aus Y gezogen wird, können sechs Straßen entstehen ($\{3,4,5,6,7\}$, $\{4,5,6,7,8\}$, $\{5,6,7,8,9\}$, $\{7,8,9,T,J\}$, $\{8,9,T,J,Q\}$ und $\{9,T,J,Q,K\}$) und drei Flushs (in den Farben der Karten aus Y):

$$\left(\binom{9}{4}\cdot\binom{3}{1}-6\right)\cdot(4^4\cdot 3-3)$$

Drei Karten aus X und zwei aus $Y \Rightarrow$ eine Straße ($\{2,3,4,5,6\}$) und zwei Flushs (in den Farben $\spadesuit$ und $\heartsuit$):

$$\left(\binom{9}{3}\cdot\binom{3}{2}-1\right)\cdot(4^3\cdot 3^2-2)$$

Zwei Karten aus X und drei aus $Y \Rightarrow$ ein Flush ($\spadesuit$):

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{3}{3}\cdot(4^2\cdot 3^3-1)$$

Vier Karten aus X und ein Ass $\Rightarrow$ zwei Flushs (in $\diamondsuit$ und $\clubsuit$):

$$\binom{9}{4}\cdot 1\cdot(4^4\cdot 2-2)$$

Drei Karten aus X, eine Karte aus der Menge $\{2,5\}$ und ein Ass $\Rightarrow$ ein Flush (in $\diamondsuit$ beim Wert 2 und in $\clubsuit$ beim Wert 5):

$$\binom{9}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot 1\cdot(4^3\cdot 3\cdot 2-1)$$

Drei Karten aus X, eine mit dem Wert J und ein Ass $\Rightarrow$ eine Straße ($\{T,J,Q,K,A\}$) und zwei Flushs (in $\diamondsuit$ und $\clubsuit$):

$$\left(\binom{9}{3}\cdot 1\cdot 1-1\right)\cdot(4^3\cdot 3\cdot 2-2)$$

Zwei Karten aus X, entweder $\{2,J\}$ oder $\{5,J\}$ und ein Ass $\Rightarrow$ ein Flush (in $\diamondsuit$ oder $\clubsuit$):

$$\binom{9}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot(4^2\cdot 3^2\cdot 2-1)$$

Zwei Karten aus X, die Werte $\{2,5\}$ und ein Ass $\Rightarrow$ eine Straße ($\{A,2,3,4,5\}$):

$$\left(\binom{9}{2}\cdot 1\cdot 1-1\right)\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2$$

Eine Karte aus X, drei aus Y und ein Ass $\Rightarrow$ keine möglichen Straßen oder Flushs:

$$\binom{9}{1} \cdot \binom{3}{3} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3^3 \cdot 2$$

Alle diese Ergebnisse können nun addiert werden. Dies ergibt die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Spieler nach dem Austeilen der Karten keine Kombination besitzt.

$$\begin{aligned}
P(\text{keine Kombination}) &= \frac{\left(\binom{9}{5} - 1\right) \cdot (4^5 - 4) + \left(\binom{9}{4} \cdot \binom{3}{1} - 6\right) \cdot (4^4 \cdot 3 - 3)}{\binom{47}{5}} + \\
&+ \frac{\left(\binom{9}{3} \cdot \binom{3}{2} - 1\right) \cdot (4^3 \cdot 3^2 - 2) + \binom{9}{2} \cdot (4^2 \cdot 3^3 - 1) + \binom{9}{4} \cdot (4^4 \cdot 2 - 2)}{\binom{47}{5}} + \\
&+ \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{2}{1} \cdot (4^3 \cdot 3 \cdot 2 - 1) + \left(\binom{9}{3} - 1\right) \cdot (4^3 \cdot 3 \cdot 2 - 2)}{\binom{47}{5}} + \\
&+ \frac{\binom{9}{2} \cdot 2 \cdot (4^2 \cdot 3^2 \cdot 2 - 1) + \left(\binom{9}{2} - 1\right) \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2}{\binom{47}{5}} + \\
&+ \frac{\binom{9}{1} \cdot 4 \cdot 3^3 \cdot 2}{\binom{47}{5}} \approx 0,49849961
\end{aligned}$$

Indem man sämtliche Einzelergebnisse addiert, lässt sich nun auch die Gewinnwahrscheinlichkeit bei zwei Spielern ausrechnen:

$$\begin{aligned}
P(2\ \text{Spieler}) &= P(\text{Pair } (2\text{–}K)) + P(AA \text{ und drei Karten } < J) + \\
&+ P(AAJ \text{ und zwei Karten } < 5) + P(\text{keine Kombination}) \approx \\
&\approx 0,41631642 + 0,00293884 + 0,0000782 + 0,49849961 = 0.91783307
\end{aligned}$$

Falls drei Spieler am Spiel beteiligt sind, ändert sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen für den ersten Spieler. Die obigen Überlegungen gelten nun für beide Gegner, jeder von ihnen darf höchstens zwei Asse, einen Buben und zwei Karten mit kleineren Werten als 5 besitzen. Da die Kartenanzahl begrenzt ist, muss streng genommen beachtet werden, dass für den dritten Spieler weniger Karten zur Verfügung stehen. Er kann die Karten, die dem zweiten Spieler ausgeteilt wurden nicht mehr ziehen. Wenn der zweite Spieler zum Beispiel zwei Asse bekommt, sind für den dritten Spieler keine mehr vorhanden.

Um die Wahrscheinlichkeit gegen zwei Spieler zu gewinnen genau berechnen zu können, müssten alle möglichen Ziehungen der beiden Gegner beachtet werden, wobei der erste fünf Karten aus 47 zieht und der zweite nur noch 42 Karten zur Verfügung hat. Somit müssten, um diese Rechnung korrekt durchzuführen,

$$\binom{47}{5} \cdot \binom{42}{5} = \frac{47!}{5! \cdot 5! \cdot 37!} \approx 1,3 \cdot 10^{12}$$

rund $1,3 \cdot 10^{12}$ Möglichkeiten durchgespielt werden.

Da dieser Umstand den Rechengang extrem verkomplizieren, zugleich allerdings das Ergebnis nur minimal verändern würde, wird er hier vernachlässigt. Die Züge der beiden Gegner werden als unabhängige Ereignisse betrachtet, was sie in Wirklichkeit nicht sind. Vereinfacht lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler mit dem Blatt $\{A\spadesuit, A\heartsuit, J\heartsuit, 5\diamondsuit, 2\clubsuit\}$ gegen zwei Gegner gewinnt, demnach folgendermaßen berechnen:

$$P(3 \text{ Spieler}) \approx P(2 \text{ Spieler}) \cdot P(2 \text{ Spieler}) \approx 0.91783307^2 \approx 0.84241754$$

Man sieht also, dass sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen von ungefähr 92 Prozent auf rund 84 Prozent verringert hat. Dies wirft die Frage auf, wie die Chancen zu gewinnen für einen Spieler mit dem Blatt $\{A\spadesuit, A\heartsuit, J\heartsuit, 5\diamondsuit, 2\clubsuit\}$ stehen, wenn viele Gegner vorhanden sind. Angenommen es spielen zehn Spieler an einem Tisch, ein Spieler mit der obigen Kartenkombination müsste sich also gegen neun andere durchschlagen. Auch in diesem Fall sollen die Ziehungen der Spieler fälschlicherweise als unabhängige Ereignisse angenommen werden, um die Rechnung zu vereinfachen. Andernfalls müssten $\frac{47!}{(5!)^9 \cdot 2!} \approx 2,5 \cdot 10^{40}$ Möglichkeiten beachtet werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gegen neun Gegner gewinnt, beträgt:

$$P(10 \text{ Spieler}) = P(2 \text{ Spieler})^9 \approx 0.91783307^9 \approx 0.46224616$$

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist bei zehn Spielern auf rund 46 Prozent gesunken. Man sieht, dass die Spieleranzahl die Gewinnwahrscheinlichkeit beeinflusst. Der Spieler mit dem Blatt $\{A\spadesuit, A\heartsuit, J\heartsuit, 5\diamondsuit, 2\clubsuit\}$ wird gegen einen oder zwei Gegner hohe Einsätze bringen können und ziemlich sicher gewinnen. Wenn er allerdings gegen viele Gegner antritt, sollte er mit einem solchen Blatt nicht zu hoch zu wetten.

7.2 Spielsituationen bei Texas Hold'em

Bei Texas Hold'em besteht nicht die Möglichkeit eine gewisse Anzahl der Karten zu tauschen. Es stehen jedem Spieler nur die sieben ausgeteilten Karten zur Bildung seiner Kombination zur Verfügung. Deshalb ist Texas Hold'em mehr vom reinen Zufall anhängig wie Five Card Draw. Aus diesem Grund lassen sich auch genauere Berechnungen aufstellen.

7.2.1 Gewinnbringende Hole–Cards

Bei Texas Hold'em werden jedem Spieler zuerst zwei Karten ausgeteilt. Noch bevor die drei Gemeinschaftskarten auf den Tisch gelegt werden gibt es eine Wettrunde. Dies wird Pre–Flop–Play genannt. Für einen Spieler ist es wichtig gute Starthände zu erkennen.

Wie viele verschiedene Starthandkombinationen gibt es?

Aus insgesamt 52 Karten werden zu Beginn zwei Karten gezogen, diese bilden die Starthand (Hole–Cards). Somit gibt es

$$\binom{52}{2} = 1326$$

mögliche Starthände, die ein Spieler ziehen kann.

Im Folgenden sollen die besten und bekanntesten Starthände ausführlicher betrachtet werden.

Ein Spieler, der sofort ein Paar ausgeteilt bekommt, sollte auf jedem Fall weiterspielen, auch wenn es sich um ein niedriges Paar handelt.

Starthand Pair:

Es gibt 13 verschiedene Werte, die das Paar annehmen kann. Die Farben der beiden Karten können aus einer 4–elementigen Menge gezogen werden. Insgesamt werden für die Starthand zwei Karten aus 52 gezogen. Somit erhält man die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Starthand Pair}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \approx 0,05882353$$

Das Paar ist als Starthand deshalb so beliebt, weil die Wahrscheinlichkeit damit im Laufe des Spiels eine bessere Kombination zu erhalten relativ groß ist. Der Spieler hofft darauf, das Blatt zu einem Three of a Kind, einem Full House oder einem Four of a Kind vervollständigen zu können. Die Wahrscheinlichkeit die Pokerkombination Paar zu verbessern, soll anhand des folgenden Beispiels berechnet werden.

Starthand $\{J\heartsuit, J\clubsuit\}$:

Damit der Spieler am Ende des Spiels einen Drilling hat, muss eine der Community–Cards den Wert J besitzen. Diese kann allerdings nur noch zwei Farben annehmen: $1 \cdot \binom{2}{1}$.

Die restlichen vier Karten müssen verschiedene Werte besitzen, welche noch aus 12 vorhandenen Werten gezogen werden können. Außerdem ergeben sich vier Möglichkeiten für eine Straße ($\{7, 8, 9, T, J\}$, $\{8, 9, T, J, Q\}$, $\{9, T, J, Q, K\}$ und $\{T, J, Q, K, A\}$), welche noch abgezogen werden müssen: $\binom{12}{4} - 4$.

Diese vier Karten können jede beliebige Farbe annehmen, allerdings ergeben sich dabei drei Möglichkeiten für einen Flush (in den Farben $\heartsuit$, $\clubsuit$ und der Farbe des dritten Buben), die ebenfalls abgezogen werden müssen: $4^4 - 3$. Schließlich muss das Ergebnis noch durch sämtliche Möglichkeiten fünf Karten aus den 50 verbliebenen zu ziehen dividiert werden. Somit erhält man insgesamt:

$$P(\text{Pair} \to \text{Three of a Kind}) = \frac{2 \cdot \left(\binom{12}{4} - 4\right) \cdot (4^4 - 3)}{\binom{50}{5}} \approx 0,1172601$$

Ein Full House kann auf zwei Arten gezogen werden. Entweder es wird ein dritter Bube gezogen, wobei noch zwei Farben zur Auswahl stehen: $1 \cdot \binom{2}{1}$. Dann muss zusätzlich noch ein Paar gezogen werden, welches noch 12 Werte und zwei der vier vorhandenen Farben annehmen kann: $\binom{12}{1} \cdot \binom{4}{2}$. Weiters müssen die übrigen beiden Karten verschiedene Werte besitzen, also aus den elf verbliebenen Werten gezogen werden. Diese können aber jede beliebige Farbe annehmen: $\binom{11}{2} \cdot 4^2$.

Die zweite Möglichkeit mit einem Paar als Starthand ein Full House zu erhalten besteht darin, dass ein Drilling gezogen wird. Diesem stehen 12 Werte zur Verfügung und kann drei der vier Farben annehmen: $\binom{12}{1} \cdot \binom{4}{3}$. Die restlichen beiden Karten müssen wieder unterschiedlichen

Wertes sein, können aber in jeder Farbe gezogen werden: $\binom{11}{2} \cdot 4^2$.
Durch addieren dieser beiden Möglichkeiten erhält man die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Pair} \to \text{Full House}) = \frac{2 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{11}{2} \cdot 4^2 + 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{11}{2} \cdot 4^2}{\binom{50}{5}} \approx$$
$$\approx 0,07974476$$

Die bestmögliche Kombination, die man mit diesem Paar erhalten kann ist ein Vierling. Hierfür müssen beide noch im Kartenstapel verbliebenen Buben gezogen werden. Die drei restlichen Karten können aus den 12 übrigen Werten gezogen werden und können jede beliebige Farbe annehmen.
Also:

$$P(\text{Pair} \to \text{Four of a Kind}) = \frac{1 \cdot 1 \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{50}{5}} \approx 0,0066454$$

Somit lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen, aus einem Paar mit Hilfe der fünf Communitiy–Cards ein gutes Blatt zu machen:

$$P(\text{Pair} \to \text{gutes Blatt}) = P(\text{Pair} \to \text{Three of a Kind}) +$$
$$+ P(\text{Pair} \to \text{Full House}) + P(\text{Pair} \to \text{Four of a Kind}) \approx 0,1172601 +$$
$$+ 0,07974476 + 0,0066454 = 0,20365026$$

Insgesamt gibt es also eine rund 20 prozentige Chance auf ein gutes Blatt mit einem Paar als Starthand. Zusätzlich, abhängig von den Farben des Paares, gibt es die Möglichkeit einen Flush oder ein Straight zu erhalten. Für diese beiden Kombinationen gibt es allerdings Starthände, die besser geeignet sind. Auf diese wird später noch genauer eingegangen werden.

Die berühmteste unter den Startkartenkombinationen ist ohne Zweifel $\{A, K\}$. Sie hat sogar einen eigenen Namen, benannt nach einer Tennisspielerin, von der böse Zungen behaupten, dass sie nur gut aussieht, aber leider nie gewinnt: Anna Kournikova.[1]

[1] vergleichsweise könnte man zum Beispiel der Kombination $\{Q, J\}$, den Namen David Beckham geben (deutsche Bezeichnung der Blätter: **D**ame, **B**ube).

Starthand $\{A, K\}$:

Es befinden sich vier Könige und vier Asse im Stapel. Die Reihenfolge muss beachtet werden, da sowohl zuerst das Ass als auch zuerst der König gezogen werden können. Demnach erhält man folgendes Ergebnis:

$$2 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{8}{663} \approx 0,01206637$$

Die erste Frage, die sich ein Spieler, der ein solches Blatt erhalten hat, stellen wird, ist: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch ein anderer Spieler ein Ass hat? Falls sich nämlich am Ende des Spiels keine Kombination aus den sieben Karten bilden lässt, hat dieser Spieler trotzdem noch Chancen mit einem Ass als High Card zu gewinnen.

Andere Spieler besitzen mindestens ein Ass:

Natürlich muss hier wieder die Spieleranzahl beachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Spieler ein Ass besitzt, verhält sich indirekt proportional zur Spieleranzahl.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler mindestens ein Ass besitzt, kann mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnet werden, also mit der Wahrscheinlichkeit, dass dieser Spieler kein Ass besitzt. Im Stapel befinden sich noch insgesamt 47 Karten, von denen drei den Wert A haben. Somit erhält man die Ergebnisse:

$$P(\text{mindestens ein Ass bei 2 Spielern}) = 1 - \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \approx 0,1175102$$

$$P(\text{mindestens ein Ass bei 3 Spielern}) = 1 - \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} = \frac{221}{980} \approx$$
$$\approx 0,2255102$$

$$P(\text{mindestens ein Ass bei 10 Spielern}) = 1 - \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{43}{46} \cdot \frac{42}{45} \cdot$$
$$\cdot \frac{41}{44} \cdot \frac{40}{43} \cdot \frac{39}{42} \cdot \frac{38}{41} \cdot \frac{37}{40} \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{35}{38} \cdot \frac{34}{37} \cdot \frac{33}{36} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{31}{34} \cdot \frac{30}{33} =$$
$$= \frac{183}{245} \approx 0,74693878$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein anderer Spieler ebenfalls ein Ass besitzt wird gerne unterschätzt, besonders bei einer größeren Spieleranzahl. Man kann deutlich sehen, dass ein Startblatt $\{A, K\}$ keinen Anlass gibt, das Spiel bereits als gewonnen anzusehen.

Eine weitere Frage, die gerne nach dem Erhalt von $\{A, K\}$ als Startblatt gestellt wird, ist: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit noch weitere Asse oder Könige zu ziehen?

Mindestens ein A oder K unter den Gemeinschaftskarten:

Auch diese Aufgabe kann mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnet werden. Wenn sich unter den Gemeinschaftskarten weder ein Ass noch ein König befinden soll, darf nur aus 44 Karten gezogen werden. Somit ergibt sich:

$$P(\text{mindestens ein Ass oder König}) = 1 - \frac{44}{50} \cdot \frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{41}{47} \cdot \frac{40}{46} \approx 0,48743227$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass $\{A, K\}$ als Startblatt eine gute Ausgangslage ist, da man mit fast 50 prozentiger Wahrscheinlichkeit am Ende der Runde zumindest ein hohes Paar in den Händen hält. Natürlich ist auch das keine Garantie zu gewinnen.

Eine weitere gewinnbringende Starthand ist jene, welche aus zwei Karten gleicher Farbe besteht, denn dann bestehen gute Chancen auf einen Flush.

Zwei Karten gleicher Farbe:

Die erste Karte kann beliebig gezogen werden, die zweite muss allerdings dieselbe Farbe besitzen wie die erste Karte. Davon sind noch 12 Stück vorhanden. Das ergibt eine Wahrscheinlichkeit von:

$$P(\text{zwei Karten gleicher Farbe}) = \frac{52}{52} \cdot \frac{12}{51} \approx 0,23529412$$

Wenn ein Spieler ein solches Blatt zu Beginn ausgeteilt bekommt, zum Beispiel $\{T\diamondsuit, 4\diamondsuit\}$, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit im Laufe des Spiels einen Flush zu bekommen?

$\{T\diamondsuit, 4\diamondsuit\}$ wird zu Flush:

Es fehlen noch drei Karten für einen Flush. Diese müssen dieselbe Farbe haben, weshalb alle von unterschiedlichem Wert sind. Die anderen beiden Karten können beliebig aus den verbliebenen 39 Karten, die anderer Farbe sind, gewählt werden: $\binom{11}{3} \cdot \binom{39}{2}$.

Es können aber auch vier Karten die Farbe $\diamondsuit$ besitzen, der Spieler hätte trotzdem einen Flush: $\binom{11}{4} \cdot \binom{39}{1}$.

Dass alle fünf Gemeinschaftskarten dieselbe Farbe besitzen, ist nicht erstrebenswert, denn dann würden alle Spieler einen Flush besitzen. Deshalb wird diese Möglichkeit nicht dazu gezählt.
Insgesamt erhält man demnach:

$$P(\{T\diamondsuit, 4\diamondsuit\} \rightarrow \text{Flush}) = \frac{\binom{11}{3} \cdot \binom{39}{2} + \binom{11}{4} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{50}{5}} \approx 0,06378023$$

Angenommen der Flop (die ersten drei Gemeinschaftskarten) sind ebenfalls bekannt: $\{Q\diamondsuit, 8\diamondsuit, 2\clubsuit\}$. Der Spieler wird sich nun die Frage stellen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass er mit den letzten beiden Karten einen Flush bekommt.

Turn oder River macht $\{T\diamondsuit, 4\diamondsuit, Q\diamondsuit, 8\diamondsuit, 2\clubsuit\}$ zum Flush:

Man kann die Rechnung mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit, also der Wahrscheinlichkeit keine Karte der Farbe $\diamondsuit$ zu ziehen, vereinfachen. In diesem Fall dürfen nur noch 38 Karten gezogen werden.

$$P(\{T\diamondsuit, 4\diamondsuit, Q\diamondsuit, 8\diamondsuit, 2\clubsuit\} \rightarrow \text{Flush}) = 1 - \frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46} \approx 0,34967623$$

Mit fast 35 Prozent Gewinnwahrscheinlichkeit ist dies eine gute Ausgangslage. Allerdings ist zu bedenken, dass, falls sowohl Turn, als auch River die Farbe $\diamondsuit$ besitzen, der andere Spieler bloß eine $\diamondsuit$–Karte braucht, um ebenfalls einen Flush in seinen Händen zu halten. Angenommen die Gemeinschaftskarten sind: $\{Q\diamondsuit, 8\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\diamondsuit, 5\diamondsuit\}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch der andere Spieler einen Flush besitzt. Auch hier wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein anderer Spieler ebenfalls einen Flush besitzt größer, je mehr Spieler sich am Spiel beteiligen.

Der andere Spieler erhält ebenfalls einen Flush:

Das Ergebnis kann analog zum obigen Beispiel berechnet werden, mit dem Unterschied, dass sich nur noch 45 Karten im Stapel befinden.

$$P(\text{der andere Spieler erhält einen Flush}) = 1 - \frac{38}{45} \cdot \frac{37}{44} = \frac{287}{990} = 0,2\overline{89}$$

Auch diese Wahrscheinlichkeit ist relativ hoch. Da der erste Spieler allerdings als höchste Karte den Wert T besitzt, ließe sich vermuten, dass er ein höheres Flush besitzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Spieler doch verliert?

Der zweite Spieler hat einen höheren Flush:

Man berechnet die Wahrscheinlichkeit wieder mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit. Der zweite Spieler soll also ein niedrigeres Blatt besitzen. Dies ist der Fall, wenn die Karten $J\diamondsuit$, $Q\diamondsuit$, $K\diamondsuit$ und $A\diamondsuit$ nicht gezogen werden. Es stehen also nur noch 41 Karten zur Verfügung. Demnach erhält man:

$$P(\text{2. Spieler hat einen höheren Flush}) = 1 - \frac{41}{45} \cdot \frac{40}{44} = \frac{17}{99} = 0,\overline{17}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler gewinnt, ist in diesem Fall also relativ hoch. Falls der Spieler allerdings einen Flush mit niedrigeren Karten besitzt, sollte man beim Wetten vorsichtig sein. Es wird nämlich oft unterschätzt, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass auch ein anderer Spieler einen Flush in seinen Händen hält.

Zum Schluss dieses Kapitels soll noch eine Starthand betrachtet werden, die gut zu einer Straße vervollständigt werden kann. Sie besteht aus zwei benachbarten Karten, am besten ohne ein Ass, da es sonst nur eine mögliche Straßenkombination gibt. Ein Beispiel dafür wäre das Blatt $\{9, T\}$.

Starthand: zwei benachbarte Karten:

Die erste Karte kann beliebig gewählt werden. Die zweite Karte soll einen benachbarten Wert besitzen. Zu jedem Kartenwert gibt es zwei benachbarte Kartenwerte, deshalb gibt es insgesamt acht Karten, die gezogen werden dürfen (jeder Wert in vier Farben). Somit erhält man:

$$P(\text{zwei benachbarte Karten}) = \frac{52}{52} \cdot \frac{8}{51} \approx 0,15686275$$

Angenommen ein Spieler hat ein solches Startblatt (zum Beispiel: $\{9, T\}$). Soeben wurde der Flop aufgedeckt: $\{3, 8, J\}$. Zu einer vollendeten Straße fehlt dem Spieler also noch eine Dame oder eine Sieben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Karten gezogen wird?

$\{3, 8, 9, T, J\}$ **wird zum Straight:**

Auch hier soll der Rechenweg vereinfacht werden, weshalb mit der Gegenwahrscheinlichkeit gerechnet wird. Gesucht sind jene Karten, die das obige Blatt nicht zu einer Straße machen würden. Da es noch je vier Karten mit den Werten D und 7 gibt, handelt es sich dabei um 39 Karten. Somit kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden:

$$P(\{3, 8, 9, T, J\} \rightarrow \text{Straight}) = 1 - \frac{39}{47} \cdot \frac{38}{46} \approx 0,31452359$$

Auch wenn nur noch eine Karte zur erhofften Straße fehlt, ist die Wahrscheinlichkeit diese zu erhalten relativ gering. Besonders deutlich wird diese Situation, wenn nur eine Möglichkeit zu einer Straße gegeben ist. Ein Spieler hat zum Beispiel die Karten $\{9, Q\}$ und im Flop liegen $\{2, T, K\}$. In diesem Fall muss eine Karte des Wertes J gezogen werden.

$\{2, 9, T, Q, K\}$ **wird zum Straight:**

Der Rechenweg erfolgt analog zum obigen Beispiel. Diesmal sind es allerdings 43 Karten, die gezogen werden dürfen, um keine Straße zu erhalten.

$$P(\{2, 9, T, Q, K\} \rightarrow \text{Straight}) = 1 - \frac{43}{47} \cdot \frac{42}{46} \approx 0,16466235$$

Der Spieler sollte also nicht zu hoch wetten, da die Wahrscheinlichkeit eine Straße zu bekommen nur bei knapp über 16 Prozent liegt.

7.2.2 Made Hand vs. Draw Situationen

In einem Pokerspiel mit zwei Spielern kommt es oft zu einer sogenannten Made Hand vs. Draw Situation. Einer der beiden Spieler hat die besseren Karten, weil er zum Beispiel ein Paar oder ein Ass hat. Dieser Spieler wird als Made Hand bezeichnet. Der andere Spieler, der Draw, hat zu diesem Zeitpunkt noch keine Kombination, aber es steht zum Beispiel einen Flush oder ein Straight in Aussicht. Keiner der Spieler will aussteigen und so kommt es in solchen Situationen meist dazu, dass sich gegen Ende des Spiels eine Menge Geld im Pot befindet. Im Folgenden sollen zwei dieser Situationen näher betrachtet werden, um zu sehen, wer die besseren Gewinnchancen besitzt, Made Hand oder Draw.

1. Beispiel:
Flop: $2\diamondsuit$, $8\spadesuit$, $9\spadesuit$
Spieler A: $T\spadesuit$, $J\spadesuit$
Spieler B: $A\heartsuit$, $5\clubsuit$

Spieler B ist im Augenblick im Vorteil (Made Hand), er würde an dieser Stelle mit Ass als High Card gewinnen. Spieler A könnte sein Blatt jedoch noch zu einem Straight, Flush oder Straight Flush vervollständigen (Draw). Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass Spieler A doch noch gewinnt. Mit seinen Hole–Cards hat er die Möglichkeit auf ein Pair, Two Pair, Three of a Kind, Straight, Flush oder Straight Flush. Mit jeder dieser Kombination würde er gegen Spieler B gewinnen, vorausgesetzt dieser erhält keine bessere Kombination.

<u>Straight Flush</u>

Um einen Straight Flush zu bekommen, muss Spieler A die Karte $Q\spadesuit$ oder $7\spadesuit$ ziehen. Insgesamt befinden sich noch 45 Karten im Stapel, der Rest wurde bereits verteilt.
Falls die Karte $7\spadesuit$ gezogen wird, darf als zweite Karte nicht $Q\spadesuit$ gezogen werden, denn dann würde aus dem Blatt ein höherer Straight Flush werden. Es stehen also nur noch 43 Karten zur Verfügung. Die Reihenfolge der Ziehung muss wieder beachtet werden: $2 \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{43}{44}$.

Falls die erste gezogene Karte bereits $Q\spadesuit$ ist, kann danach eine beliebige Karte gewählt werden: $2 \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{44}{44}$.
Insgesamt ergibt sich also:

$$P(\text{Spieler A} \to \text{Straight Flush}) = \frac{2}{45} \cdot \left(\frac{43}{44} + 1\right) = \frac{29}{330} = 0.0\overline{87}$$

Flush

Für einen Flush benötigt Spieler A mindestens eine Pik–Karte. Es darf jedoch nicht $7\spadesuit$ oder $Q\spadesuit$ gezogen werden, da Spieler A sonst einen Straight Flush hätte. Somit gibt es noch sieben mögliche Pik–Karten.
Wird nur eine Pik–Karte gezogen, kann die zweite Karte noch unter 36 Stück gewählt werden, denn sie muss eine andere Farbe haben. Auch die Reihenfolge der Ziehung muss beachtet werden: $2 \cdot \frac{7}{45} \cdot \frac{36}{44}$.
Es können aber auch zwei Pik–Karten gezogen werden, Spieler B hätte dadurch trotzdem kein für den Sieg ausreichendes Blatt: $\frac{7}{45} \cdot \frac{6}{44}$.
Somit erhält man:

$$P(\text{Spieler A} \to \text{Flush}) = \frac{7}{45} \cdot \left(2 \cdot \frac{36}{44} + \frac{6}{44}\right) = \frac{91}{330} = 0,2\overline{75}$$

Straight

Für ein Straight benötigt Spieler A eine Karte mit den Werten 7 oder Q.
Es gibt drei Möglichkeiten eine Karte mit dem Wert 7 zu ziehen, da diese nicht die Farbe $\spadesuit$ haben darf. Die zweite Karte darf ebenfalls keine Pik–Karte und auch keine Dame sein. Demnach dürfen noch 32 Karten gezogen werden: $2 \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{32}{44}$.
Wenn der Wert Q gezogen wird, gilt für die zweite Karte nur die Einschränkung, dass sie nicht die Farbe Pik haben darf. Es können also noch 35 Karten gezogen werden: $2 \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{35}{44}$.
Also:

$$P(\text{Spieler A} \to \text{Straight}) = 2 \cdot \frac{3}{45} \cdot \left(\frac{32}{44} + \frac{35}{44}\right) = \frac{67}{330} = 0,2\overline{03}$$

Three of a Kind

Spieler A benötigt dafür zwei Karten des Wertes T oder zwei Karten des Wertes J.
Von diesen beiden Karten existieren noch je drei Stück. Aus diesem Grund beträgt die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Spieler A} \to \text{Three of a Kind}) = 2 \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{2}{44} = \frac{1}{165} = 0,0\overline{06}$$

Two Pair

Eines der beiden Paare muss entweder den Wert T oder den Wert J besitzen. Somit gibt es folgende Möglichkeiten für Two Pair: JT, $T9$, $J9$, $T8$, $J8$, $T2$ und $J2$, wobei die Karte mit dem Wert 2 nicht in der Farbe ♠ gezogen werden darf. Von diesem Wert stehen also nur noch zwei Karten zur Verfügung, während von den anderen noch je drei Stück gezogen werden können.
Somit ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Spieler A} \to \text{Two Pair}) = 2 \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{3}{44} \cdot 5 + 2 \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{2}{44} \cdot 2 = \frac{19}{330} = 0,0\overline{57}$$

Pair

Damit Spieler A ein Paar hat, muss dieses entweder den Wert T oder den Wert J besitzen, wovon noch je drei Karten vorhanden sind. Die zweite Karte darf keine ♠–Karte (neun Stück) sein, nicht die Werte 7 oder Q (sechs Stück) und auch nicht einen der Werte T und J (von einem sind noch zwei vom anderen drei Stück vorhanden, je nachdem welchen Wert das Paar hat) besitzen. Auch die Werte 2, 8 und 9 (vom Wert 2 existieren nur noch zwei Karten, von den anderen beiden noch drei Karten) und der Wert A (zwei Stück) darf nicht gezogen werden, denn sonst hätte Spieler B eine höhere Kombination. Somit dürfen 30 von den 44 übrigen Karten nicht gezogen werden. Die Reihenfolge der Kartenziehung muss wieder berücksichtigt werden.
Insgesamt erhält man:

$$P(\text{Spieler A} \to \text{Pair}) = 2 \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{14}{44} \cdot 2 = \frac{14}{165} = 0,0\overline{84}$$

Indem alle obigen Wahrscheinlichkeiten miteinander addiert werden, lässt sich nun die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler A (Draw) ausrechnen.

$$\begin{gathered} P(\text{Spieler A gewinnt}) = P(\text{Spieler A} \to \text{Straight Flush}) + \\ +P(\text{Spieler A} \to \text{Flush}) + P(\text{Spieler A} \to \text{Straight}) + \\ +P(\text{Spieler A} \to \text{Three of a Kind}) + P(\text{Spieler A} \to \text{Two Pair}) + \\ +P(\text{Spieler A} \to \text{Pair}) = 0.0\overline{87} + 0,2\overline{75} + 0,2\overline{03} + 0,0\overline{06} + 0,0\overline{57} + 0,0\overline{84} = \\ = 0,7\overline{15} \end{gathered}$$

Spieler A hat also eine Gewinnwahrscheinlichkeit von über 71 Prozent. An diesem Beispiel kann man sehen, dass ein Spieler, der sich in der Made Hand Position befindet (Spieler B), nicht unbedingt gewinnen muss.

2. Beispiel:
Flop: $K\spadesuit$, $T\diamondsuit$, $4\heartsuit$, $2\diamondsuit$
Spieler A: $A\heartsuit$, $A\clubsuit$
Spieler B: $8\diamondsuit$, $7\diamondsuit$
Blinds: 20|40€
Pot: 200€

Diesmal ist die Fragestellung eine andere. Es wird untersucht, bei welchem Spielzug Spieler A den größtmöglichen Gewinn erhält. Zunächst soll die Ausgangssituation näher betrachtet werden. Die Turn–Karte wurde soeben aufgedeckt. Spieler A ist an der Reihe die vorletzte Wettrunde zu eröffnen. Er befindet sich in der Made Hand Position, Spieler B kann jedoch noch mit einem Flush gewinnen.

Gewinnwahrscheinlichkeiten:

Spieler B gewinnt, wenn eine $\diamondsuit$–Karte gezogen wird, von denen sich noch neun Stück im Stapel befinden. Insgesamt gibt es noch 44 Karten. Somit betragen die Gewinnwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(\text{Spieler B gewinnt}) &= \frac{9}{44} = 0,20\overline{45} \\ P(\text{Spieler A gewinnt}) &= 1 - \frac{9}{44} = \frac{35}{44} = 0,79\overline{54} \end{aligned}$$

Spieler A hat nun die Möglichkeiten zu wetten (bet) oder abzuwarten (check). Da er sich in der Made Hand Position befindet, wird er nicht aus dem Spiel aussteigen.

Falls sich Spieler A dazu entscheidet abzuwarten, wird auch Spieler B dieser Entscheidung folgen, da er keine hohe Gewinnwahrscheinlichkeit hat. Spieler A könnte somit mit folgendem Gewinn rechnen:

<u>A check ⇒ B check</u>

Spieler A gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{35}{44}$. Da sich niemand entscheidet zu wetten, bleibt der Pot bei einer Höhe von 200€. Somit beträgt der von Spieler A zu erwartende Gewinn:

$$\mu_{\text{A check}} = \frac{35}{44} \cdot 200 = \frac{1750}{11} = 159,\overline{09}$$

Spieler A kann aber auch wetten. In diesem Fall muss sich Spieler B entscheiden, aufzugeben (fold) oder mitzugehen (call). Angenommen Spieler A entscheidet sich für einen Wetteinsatz in der Höhe des Big Blinds (40€).

Spieler B gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{44}$. Wenn er mitgeht und gewinnt, würde er einen Pot in der Höhe von 280€ $(200 + 2 \cdot 40)$ erhalten. Um den Gewinn zu berechnen, müssen allerdings die 40€, die Spieler B gesetzt hat, wieder abgezogen werden.

$$\mu_{\text{B call}} = \frac{9}{44} \cdot 280 - 40 = \frac{190}{11} = 17,\overline{27}$$
$$\mu_{\text{B fold}} = 0$$

Spieler B wird sich demnach dazu entscheiden mitzugehen, wenn Spieler A wettet. Nun stellt sich noch die Frage nach dem zu erwartenden Gewinn von Spieler A, falls dieser sich entscheidet zu wetten:

<u>A bet ⇒ B call</u>

Spieler A gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{35}{44}$. Der Pot würde sich dann bei einer Höhe von 280€ befinden. Der Einsatz muss abgezogen werden.

$$\mu_{\text{A bet}} = \frac{35}{44} \cdot 280 - 40 = \frac{2010}{11} = 182,\overline{72}$$

Mit über 180 Euro macht Spieler A den größten Gewinn, wenn er sich entscheidet zu wetten. Diese Spielsimulation setzt natürlich voraus, dass beide Spieler der optimalen Spielweise folgen. In der Praxis kann dies, da die Spieler die Karten des Gegners nicht kennen, nicht vorausgesetzt werden.

Die beiden Beispiele haben gezeigt, dass in einer Made Hand vs. Draw Situation der Spieler in der Made Hand Position üblicherweise wettet. Der Spieler in der Draw Position muss sich überlegen, ob seine Gewinnerwartung positiv oder negativ ist und macht sein Handeln (mitgehen oder aufgeben) davon abhängig.

7.2.3 Potgröße

Neben der Spielweise und der Anzahl der Spieler ist auch die bisher noch nicht behandelte Potgröße ausschlaggebend für gewinnen und verlieren. Ab einer gewissen Potgröße ist es für einen Spieler besser zu wetten, während er bei kleineren Pots besser aussteigen sollte. Dies soll nun anhand eines Beispiels veranschaulicht werden.

Flop: $A\heartsuit$, $Q\diamondsuit$, $7\heartsuit$
Spieler A: $A\clubsuit$, $Q\clubsuit$
Spieler B: $3\heartsuit$, $6\heartsuit$
Pot: 40€
Blinds: 20|40€

Spieler A befindet sich in der Made Hand Position, Spieler B in der Draw Position. Letzterer kann nur gewinnen, wenn er am Ende einen Drilling, eine Straße oder einen Flush in der Hand hält. Es wird vorerst nur die nachfolgende Wettrunde betrachtet, also die zweite Wettrunde. Spieler A ist an der Reihe und entscheidet sich zu wetten, da er in der Made Hand Position ist. Nun muss Spieler B handeln. Ist es klüger mitzugehen oder aufzugeben? Um diese Wettrunde zu gewinnen, braucht er einen Flush, denn mit jeder anderen Karte würde Spieler A noch immer im Vorteil sein.

Spieler B vervollständigt in dieser Wettrunde seinen Flush:

Es befinden sich noch neun $\heartsuit$–Karten im Stapel. Jedoch darf die $Q\heartsuit$ nicht gezogen werden, sonst hätte Spieler A ein Full House.

$$P(\text{B} \rightarrow \text{Full House}) = \frac{8}{45} = 0,1\dot{7}$$

Pot: 40€

Spieler A wettet 40€. Spieler B muss sich nun entscheidet, ob er mitgehen will oder nicht.

Wenn Spieler B mitgeht (call), befinden sich im Pot 120€ $(40 + 2 \cdot 40)$. Sein Einsatz muss aber wieder abgezogen werden. Somit beträgt sein zu erwartender Gewinn:

$$\mu_{\text{B call}} = \frac{8}{45} \cdot 120 - 40 = -\frac{56}{3} = -18,\dot{6}$$
$$\mu_{\text{B fold}} = 0$$

Spieler B wird sich also dazu entscheiden aufzugeben. Das Risiko ist zu groß.

Pot: 320€

Angenommen der Pot befindet sich nicht bei 40€, sondern bereits bei 320€. Wie würde diese Situation dann ausgehen?

$$\mu_{\text{B call}} = \frac{8}{45} \cdot 400 - 40 = \frac{280}{9} = 31.\dot{1}$$
$$\mu_{\text{B fold}} = 0$$

In diesem Fall sollte sich Spieler B dazu entscheiden mitzugehen. Ein guter Pokerspieler darf also nie vergessen die Potgröße zu beachten.

Als nächste Karte (Turn) wird $T\spadesuit$ aufgedeckt. Keiner der beiden Spieler hat dadurch ein besseres Blatt erhalten. Wie stehen nun die Chancen für Spieler B zu gewinnen?

Spieler B gewinnt:

Der einzige Unterschied zu vorhin besteht darin, dass sich nun nur noch 44 Karten im Stapel befinden.

$$P(\text{B gewinnt}) = \frac{8}{44} = 0,\overline{18}$$

Spieler A wettet wieder 40€. Es stellt sich die Frage wie Spieler B nun reagieren soll.

$$\mu_{\text{B call}} = \frac{8}{44} \cdot 480 - 80 = \frac{80}{11} = 7,\overline{27}$$
$$\mu_{\text{B fold}} = 0$$

Auch hier wäre es für Spieler B besser mitzugehen.

Pot: 160€

Wie sieht die gesamte Spielsituation allerdings aus, wenn der Pot zu Beginn der zweiten Wettrunde 160€ beträgt?

Die beiden Gegner befinden sich wieder vor der zweiten Wettrunde, in der Spieler B eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{8}{45}$ hat. Spieler A wettet 40€. Wie wird Spieler B reagieren?

$$\mu_{\text{B call}} = \frac{8}{45} \cdot 240 - 40 = \frac{8}{3} = 2,\dot{6}$$
$$\mu_{\text{B fold}} = 0$$

Spieler B sollte also in dieser Wettrunde mitgehen.

Nun wird die Karte $T\spadesuit$ aufgedeckt und Spieler A wettet wiederum 40€. Ist es für Spieler B noch immer besser mitzugehen?

$$\mu_{\text{B call}} = \frac{8}{44} \cdot 320 - 80 = -\frac{240}{11} = -21,\overline{81}$$
$$\mu_{\text{B fold}} = 0$$

Somit wird sich Spieler B entscheiden hier auszusteigen.

Es wurde gezeigt, dass das Spielverhalten von der Potgröße abhängt, oder zumindest abhängen sollte. Je mehr Geld sich im Pot befindet, desto eher sollte der Spieler in der Draw Position mitgehen. Der Spieler, der sich in der Made Hand Position befindet wird immer wetten, da er die größere Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

Kapitel 8

Glücks- vs. Geschicklichkeitsspiel

Ist Pokern ein Glücks– oder ein Geschicklichkeitsspiel? Darüber wird bereits seit Erfindung dieses Spiels gestritten. Untersuchungen, inwieweit die Kartenverteilung oder ähnlich vom Glück abhängige Faktoren über Sieg oder Niederlage entscheiden, lagen lange nicht vor. Genauso wenig konnte berechnet werden, wie viel Einfluss die Geschicklichkeit, also die Technik und Berechnungen, des Spielers den Spielverlauf beeinflussen. Fest steht allerdings, dass ein Spieler, der gut blufft, einen anderen dazu bringen kann das Spiel vorzeitig zu verlassen, unabhängig von der Stärke seines Blattes. Doch hat ein Bluff einen ähnlich hohen Einfluss auf das Spiel wie die zufällig verteilten Karten? Wie in den vorherigen Kapiteln gezeigt wurde, ist der Gewinn zusätzlich zur Kartenverteilung auch von der Spieleranzahl und der Höhe des Pots abhängig. Somit liegt der Verdacht nahe, dass ein guter Pokerspieler mit viel Wissen und Erfahrung seinem Glück auf die Sprünge helfen kann.

In Deutschland gilt Poker seit jeher strafrechtlich als Glücksspiel. Im Strafgesetzbuch steht unter §284:

> *Wer ohne behördliche Erlaubnis öffentlich ein Glücksspiel veranstaltet oder hält oder die Einrichtungen hierzu bereitstellt, wird mit Freiheitsstrafe bis zu zwei Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.*[1]

Österreich galt hingegen lange als Pokerparadies, da es strafrechtlich als Geschicklichkeitsspiel eingestuft wurde. Allerdings war es entgegen einer weit

[1] Juristischer Informationsdienst (2011): Strafgesetzbuch. § 284 Unerlaubte Veranstaltung eines Glücksspiels. `http://dejure.org/gesetze/StGB/284.html` , (13.02.2011).

verbreiteten Meinung auch in Österreich nicht erlaubt ohne Lizenz Pokerturniere zu veranstalten.

> *Die Übergangsbestimmung in § 60 Abs. 24 reflektiert den Umstand, dass nach langjähriger Ansicht und Auslegungspraxis des Bundesministers für Finanzen die unternehmerische Durchführung von Poker außerhalb von Spielbanken in Pokersalons bereits nach der bisherigen Rechtslage verboten war (...). Dies wurde in der Vergangenheit von Seiten einzelner Unternehmer rechtlich bestritten.*[2]

Eindeutig war die Situation demnach nicht. Jahrelang gab es Diskussionen zu diesem Thema. 2008 wurde das Glücksspielgesetz schließlich geändert:

> *§ 1. (1) Ein Glücksspiel im Sinne dieses Bundesgesetzes ist ein Spiel, bei dem die Entscheidung über das Spielergebnis ausschließlich oder vorwiegend vom Zufall abhängt. (2) Glücksspiele im Sinne dieses Bundesgesetzes sind insbesondere die Spiele Roulette, Beobachtungsroulette, Poker, Black Jack, Two Aces, Bingo, Keno, Baccarat und Baccarat chemin de fer und deren Spielvarianten. Der Bundesminister für Finanzen ist ermächtigt, aus Gründen der Rechtssicherheit durch Verordnung weitere Spiele als Glücksspiele im Sinne des Abs. 1 zu bezeichnen.*[3]

Der österreichische Verwaltungsgerichtshof berief sich bei der Änderung auf ein Gutachten, das dem Pokerspiel eindeutig eine Glückspieleigenschaft zugeschrieben hatte. Wie in dieser Arbeit oftmals bewiesen wurde, ist die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Kartenkombination zu erhalten sehr klein. Diese Wahrscheinlichkeit ist jedoch die einzige Grundlage auf der ein Spieler aufbauen kann, um sich über zukünftige Karten oder die Karten seiner Gegner Gedanken zu machen. Laut diesem Gutachten ändert auch die Möglichkeit durch einen guten Bluff einen Mitspieler aus dem Rennen zu drängen nichts an der Tatsache, dass das Pokerspiel zum größten Teil vom Zufall abhängt,

[2]Bundesministerium für Finanzen (2011): Glücksspielgesetz-Novelle 2008. Erläuterungen. `http://www.bmf.gv.at/Steuern/Fachinformation/NeueGesetze/Glcksspiel gesetzNov_ 11061/GSpG_ 2008_ erl_ 12042010.pdf`. S. 8, (13.02.2011).

[3]Bundesministerium für Finanzen (2011): Glücksspielgesetz-Novelle 2008. Artikel 1. Änderung des Glücksspielgesetzes. `http://www.bmf.gv.at/Steuern/Fachinformation/NeueGesetze/Glcksspielgesetz Nov_ 11061/GSpG_ 2008_ ges_ 12042010.pdf`. S. 1, (13.02.2011).

da hauptsächlich diese kleine Wahrscheinlichkeit des günstigen Blattes über Sieg oder Niederlage entscheidet.[4]

Pokern ist seit 2008 also offiziell ein Glücksspiel. Um zu verstehen, welche strafrechtlichen Folgen sich daraus ableiten, soll der Gesetzestext hier kurz dargestellt werden.

> *Das Anbieten von Glücksspielen wie z.B. international gebräuchliche Poker-Spielvarianten (z.B. Texas Hold'Em, Omaha, 7 Card Stud, 5 Card Draw) ist gemäß § 4 Abs. 1 GSpG nur dann kein Eingriff in das Glücksspielmonopol des Bundes, wenn diese* ***nicht in Form einer „Ausspielung"*** *angeboten werden und in weiterer Folge kein Bankhalter mitwirkt oder der Einsatz EUR 0,50 pro Spiel nicht übersteigt.(...)*
> *Gemäß § 2 Abs 1 GSpG sind* ***Ausspielungen*** *„Glücksspiele, bei denen der Unternehmer (Veranstalter) den Spielern für eine vermögensrechtliche Leistung eine vermögensrechtliche Gegenleistung in Aussicht stellt".*[5]

Das bedeutet natürlich nicht, dass Poker nur noch im Casino erlaubt ist. Es gibt eigene Regeln für Pokerrunden in Bars oder ähnlichen Etablissements.

> *Zur Legalisierung des so genannten „kleinen Wirtshauspokers" soll klargestellt werden, dass eine Ausspielung von Kartenspielen in Turnierform zum bloßen Zeitvertreib dann keinen Eingriff in das Glücksspielmonopol und damit keine Strafbarkeit bedeutet, wenn die vorgegebenen Grenzen eingehalten werden. Dies ist dann der Fall, wenn nur geringfügige Beträge eingesetzt werden (maximal 10 Euro an vermögenswerten Leistungen pro Teilnehmer und Turnier) (...) und derartige Veranstaltungen höchstens einmal pro Quartal stattfinden. Ein Ausspielen von z.B. hohen Sponsorgeldern ist daher unzulässig. Die Anzahl der Turnierteilnehmer ist mit 100 Personen begrenzt.*[6]

---

[4] vgl.: Dr.Wojnar, Petra (2005): VwGH entscheidet: Poker ist ein Glücksspiel! `http://zfg.univie.ac.at/2/Texte/123.htm`, (13.02.2011).

[5] Bundesministerium für Finanzen(2011): Häufig gestellte Fragen zum Glücksspielmonopol (FAQs). `http://www.bmf.gv.at/Glcksspielmonopol/HufiggestellteFrage_752/_ start.htm` , (23.02.2011).

[6] Bundesministerium für Finanzen (2011): Glücksspielgesetz-Novelle 2008. Erläuterungen. `http://www.bmf.gv.at/Steuern/Fachinformation/NeueGesetze/Glcksspiel gesetzNov_ 11061/GSpG_ 2008_ erl_ 12042010.pdf`. S. 4, (13.02.2011).

Kapitel 9

Resümee

Diese Arbeit kann, keine genaue Anleitung zum sicheren Gewinn bieten. Warum dies nicht möglich ist, wurde im letzten Kapitel ausgeführt. Pokern ist ein Glücksspiel. Jedoch muss das Werfen einer Münze vom Pokerspiel unterschieden werden. Ersteres bietet keinerlei Möglichkeiten einzugreifen. Die Münze wird geworfen und fällt auf Kopf oder Zahl. Dies ist reiner Zufall, vorausgesetzt es handelt sich dabei um eine faire Münze. Beim Pokern ist die Situation jedoch eine andere. Der Spieler ist aktiv am Spielprozess beteiligt. Er kann entscheiden, ob er tauschen will oder nicht, wie viel er setzt und wann er aussteigt. Wie im siebten Kapitel gezeigt wurde, hängt die Gewinnwahrscheinlichkeit eines Spielers davon ab, welche Karten er tauscht. Es gibt in diesem Fall einen optimalen Tausch, der die maximale Gewinnwahrscheinlichkeit bringt. Jedoch ist auch der beste Tausch keine Garantie für einen Gewinn. Weiters wurde gezeigt, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeit indirekt proportional zur Spieleranzahl verhält. Dies war intuitiv vorherzusehen. Wie rapide die Gewinnwahrscheinlichkeit abnimmt, überrascht dennoch.

Auch die Betrachtungen zu Texas Hold'em lieferten spannende Ergebnisse. Es wurden die sogenannten gewinnbringenden Starthände auf ihre tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit untersucht. So lässt sich feststellen, mit welchen Hole–Cards ein Pokerspieler auf gar keinen Fall aus dem Spiel aussteigen sollte. Für Anfänger ist es oft besonders schwer gute von schlechten Startkarten zu differenzieren. Wenn zwei Gegner gegeneinander spielen, kommt es oft zu einer Made Hand vs. Draw Situation. Hier wurde gezeigt, dass der Spieler in der Made Hand Position stets wetten sollte und jener in der Draw Position nur dann mitgehen sollte, wenn sein Erwartungswert zu gewinnen positiv ist. Ein sehr spannendes Ergebnis dieser Arbeit ist, dass der zu erwartende Gewinn von der Größe des Pots abhängt. Es ließ sich erkennen, dass ein Spieler in der Draw Position bei großen Pots eher mitgehen sollte, als bei kleinen Pots. Dieser Ratschlag sollte jedoch mit Vorsicht beherzigt werden, da die Wahrscheinlichkeit zu verlieren immer noch gegeben ist und ein Spieler sich mit einer solchen Spielweise schnell in den Ruin treiben kann.

Natürlich gibt es weitere Faktoren, die in Zusammenhang mit der Gewinnwahrscheinlichkeit gebracht werden können, aber den Rahmen dieser Arbeit gesprengt hätten. Dazu würde zum Beispiel die psychologische Komponente zählen. Ein Spieler, der gut bluffen kann, ist klar im Vorteil.

Da der Ausgang eines Pokerspiels auch von den Spielern abhängt, wird man in einem Casino nie Texas Hold'em oder Five Card Draw gegen den Croupier spielen können. Casinos müssen sicher gehen, dass sie immer die höhere Gewinnerwartung haben. Im sechsten Kapitel wurde eine Pokervariante vorgestellt, für die dies nicht zutrifft: Tropical Stud. Hier ist es möglich einen Erwartungswert auszurechnen, was in diesem Kapitel auch in vereinfachter Form geschehen ist, weshalb die Konditionen so geregelt werden können, dass das Casino mit einem positiven Erwartungswert aussteigt. Eine solche Berechnung wäre für die übrigen Pokervarianten nicht möglich. Dies ist auch der Grund, warum es bis heute noch nicht gelungen ist ein wirklich brauchbares Computerprogramm zu entwickeln, bei dem ein Spieler gegen den Computer antreten kann, wie das zum Beispiel bei Schach der Fall ist.

Trotz all dieser Hilfsmittel ist es nicht möglich eine sichere Gewinnstrategie für das Pokerspiel zu entwickeln. Die Karten werden zufällig verteilt, darauf hat keiner der Spieler einen Einfluss. In dieser Arbeit wurde der Versuch unternommen die optimale Reaktion in bestimmten Spielsituationen zu finden. Im Vergleich zu allen möglichen Konstellationen wurde nur ein minimaler Bruchteil erarbeitet. Sämtliche Gegebenheiten zu betrachten, würden den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen, falls ein solches Vorhaben überhaupt möglich ist.

Kapitel 10

Schlusswort

Das Verfassen dieser Diplomarbeit war äußerst lehrreich und interessant. Dies lag zum Großteil an der Ergiebigkeit der Materie. Zu Beginn war ich unsicher welches Thema ich wählen sollte. Es stand allerdings von Anfang an fest, dass es im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie beheimatet sein sollte. Dieser Bereich der Mathematik hat mich schon in Schulzeiten besonders fasziniert, da es zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten dafür gibt. Mit meiner Vorstellung über eine Diplomarbeit in Wahrscheinlichkeitstheorie, möglicherweise mit spieltheoretischer Verbindung ging ich zu meinem Betreuer Prof. Dr. Peter Raith. Nach einem ausführlichem Gespräch stand das Thema meiner Diplomarbeit fest: Pokern.

Ich stürzte mich sofort mit Begeisterung auf die Literatursuche, musste jedoch feststellen, dass sich nicht besonders viel zu meinem Thema fand. Das Fehlen von Hintergrundinformation hat sich zu Beginn als meine größte Schwierigkeit herausgestellt. Im Nachhinein bin ich jedoch froh darüber, da ich gemerkt habe, wie viel Spaß mir das selbständige Erarbeiten macht. Es ist spannend sich neue Fragestellungen zu überlegen und, ohne über die richtigen Ergebnisse Bescheid zu wissen, die Lösungen eigenständig zu finden. Dabei sind viele interessante Ergebnisse zustande gekommen. Einige Faktoren, welche die Gewinnwahrscheinlichkeit eines Pokerspielers beeinflussen, kamen völlig unerwartet. Zum Beispiel hätte ich nie damit gerechnet, dass die Größe des Pots über gewinnen oder verlieren entscheiden kann. Natürlich waren nicht alle Schlussfolgerungen, die aus den Rechnungen gezogen werden konnten, überraschend. Als das Tauschverhalten bei Five Card Draw auf maximale Gewinnwahrscheinlichkeit untersucht wurde, konnten die Resultate mehr oder weniger erahnt werden. Trotzdem war es spannend, die von mir aufgestellten Vermutungen zu beweisen.

Letztendlich bin ich mit dem Ergebnis meiner Diplomarbeit zufrieden. Ich habe bei der Erarbeitung der Resultate viel gelernt und hatte gleichzeitig Freude daran. Obwohl die Wahrscheinlichkeitstheorie als eigenständiges Teilgebiet der Mathematik längst der reinen Glücksspielanalyse entwachsen ist, ist dies immer noch einer der spannendsten Anwendungsbereiche.

Abschließend möchte ich mich an dieser Stelle bei allen Personen bedanken, die mir bei der Erarbeitung dieser Diplomarbeit geholfen haben. Mein besonderer Dank geht an meinen Betreuer Prof. Dr. Peter Raith, der mich während des Schreibens umfangreich unterstützte. Er opferte mir viel seiner Zeit um mir mit Ideen und Anregungen zu helfen. Weiters bin ich meinem Freund Karl Oberascher zu Dank verpflichtet, der mir bei Problemen mit der Formulierung und der Korrektur der Diplomarbeit zur Seite stand.
Natürlich danke ich auch meinen Eltern, Erich und Anna Maria Krupitschka, die mich während meines Studiums finanziell unterstützten und meinen Freunden, die mir eine wundervolle Studienzeit bescherten.

Kapitel 11

Glossar

All–In:	Ein Spieler geht All–In, wenn er bei einer Wettrunde alle Chips setzt, die er besitzt.
Ante:	Ein Zwangseinsatz, der von allen Spielern vor Beginn einer Spielrunde erbracht werden muss.
Bet:	Wetten – das Setzen eines Einsatzes.
Big Blind:	Ein Zwangseinsatz, den der zweite Spieler links vom Dealer vor Beginn der Spielrunde erbringen muss.
Blatt:	Die Karten, die ein Spieler in der Hand hält.
Blind:	Ein erzwungener Mindesteinsatz beim Pokerspiel.
Buy–In:	Das Startgeld bei Turnieren.
Call:	Mitgehen – das Bezahlen des gesetzten Einsatzes.
Check:	Schieben – sofern noch niemand gesetzt hat, kann man die Wettrunde aussetzen.
Community–Cards:	Karten, die alle Spieler sehen und zur Vervollständigung ihres Blattes benutzen können.
Croupier:	So wird der Dealer im Casino genannt.
Dealerbutton:	Eine Scheibe zur Kennzeichnung des Dealers.
Deck:	Alle 52 Karten, mit denen gespielt wird.
Eight–Low:	Der höchste Kartenwert des Blattes ist 8.

Five–Low:	Der höchste Kartenwert des Blattes ist 5.
Fixed Limit:	Der Wettbetrag ist begrenzt.
Flop:	Die ersten drei Gemeinschaftskarten bei Texas Hold'em.
Fold:	Aufgeben – der Spieler steigt aus.
Hole–Cards:	Karten, die ein Spieler verdeckt erhält.
Jackpot:	Name des Pots, wenn ein Spieler mindestens zwei Buben in der Hand halten muss um wetten zu dürfen.
Joker:	Kann stellvertretend für jede beliebige Karte eingesetzt werden.
Kartendeck:	$\uparrow$ Deck.
Lowball:	Das schlechteste Blatt gewinnt.
Nine–Low:	Der höchste Kartenwert des Blattes ist 9.
No Limit:	Es dürfen beliebig hohe Beträge gesetzt werden.
Pokerdeck:	$\uparrow$ Deck.
Pot:	Die gesetzten Chips aller Spieler.
Pre–Flop:	Die erste Wettrunde bei Texas Hold'em.
Raise:	Erhöhen – einen höheren Betrag setzen.
River:	Die letzte Gemeinschaftskarte bei Texas Hold'em.
Showdown:	Alle Spieler müssen ihre Karten aufdecken.
Seven–Low:	Der höchste Kartenwert des Blattes ist 7.
Six–Low:	Der höchste Kartenwert des Blattes ist 6.
Small Blind:	Ein Zwangseinsatz, den der Spieler links vom Dealer erbringen muss.
Split Pot:	Der Pot wird bei mehreren Gewinnern geteilt.
Stack:	Alle Chips, die ein Spieler besitzt.
Ten–Low:	Der höchste Kartenwert des Blattes ist T.
Turn:	Die vierte Gemeinschaftskarte bei Texas Hold'em.

Kapitel 12

Bibliographie

12.1 Literaturverzeichnis

Bandelow, Christoph (1989): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim; Wien; Zürich.

Bauer, Heinz (1991): Wahrscheinlichkeitstheorie. Walter de Gruyter, Berlin.

Bosch, Karl (2000): Glücksspiele. Chance und Risiken. R. Oldenburg Verlag, München.

Chen, Bill / Ankenman, Jerrod (2006): The Mathematics of Poker. ConJelCo LLC, Pittsburgh.

Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg.

Georgii, Hans–Otto (2007): Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Walter de Gruyter, Berlin.

Häggström, Olle (2006): Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg.

Harroch, Richard D. / Krieger Lou(2006): Poker für Dummies. WILEY-VCH Verlag, Weinheim.

Hauser, Walter (1997): Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Verbindung von Glücksspieltheorie und statistischer Praxis vor Laplace. Franz Steiner Verlag, Stuttgart.

Meinert, Jan (2007): Die Pokerschule. Texas Hold'em Poker für Anfänger und Fortgeschrittene. Knaur Taschenbuch Verlag, München.

12.2 Internetquellen

Balmer, Frank (2010): Poker Geschichte. http://www.poker-tipps-und-tricks.com/allgemein/poker-geschichte, (20.02.2011).

Bundesministerium für Finanzen (2011): Glücksspielgesetz–Novelle 2008. Artikel 1. Änderung des Glücksspielgesetzes. http://www.bmf.gv.at/Steuern/Fachinformation/NeueGesetze/GlcksspielgesetzNov_11061/GSpG_2008_ges_12042010.pdf. S. 1, (13.02.2011).

Bundesministerium für Finanzen (2011): Glücksspielgesetz–Novelle 2008. Erläuterungen. http://www.bmf.gv.at/Steuern/Fachinformation/NeueGesetze/GlcksspielgesetzNov_11061/GSpG_2008_erl_12042010.pdf. S. 4, (13.02.2011).

Bundesministerium für Finanzen(2011): Häufig gestellte Fragen zum Glücksspielmonopol (FAQs). http://www.bmf.gv.at/Glcksspielmonopol/HufiggestellteFrage_752/_start.htm, (23.02.2011).

Gamblingplanet.org (2011): Online Poker–Omaha–Wahrscheinlichkeiten. www.gamblingplanet.org/de/Omaha-Wahrscheinlichkeiten, (20.02.2011).

Hilbert, David (1900): Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker–Kongreß zu Paris 1900. In: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch–Physikalische Klasse. Zeitschriftenband. S. 253–297. DigiZeitschriften. Das deutsche digitale Zeitschriften Archiv: http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN002498863, (12.02.2011).

Juristischer Informationsdienst (2011): Strafgesetzbuch. § 284 Unerlaubte Veranstaltung eines Glücksspiels. http://dejure.org/gesetze/StGB/284.html, (13.02.2011).

Pokern.com (2008): Der Ursprung des Pokerspiels. http://www.pokern.com/pokerschule/allgemeine-poker-strategien/die-geschichte-des-poker.html, (20.02.2011).

Wojnar, Petra (2005): VwGH entscheidet: Poker ist ein Glücksspiel! http://zfg.univie.ac.at/2/Texte/123.htm, (13.02.2011).

12.3 Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: vgl.: Dehling, Herold / Haupt, Beate (2003): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg. S. 5.

Abb. 2: Wikimedia (2011): `http://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page`, (06.03.2011).

Kapitel 13

Lebenslauf

Angaben zur Person:

Name:	Carina Krupitschka
Geburtsdatum:	12. Oktober 1986
Geburtsort:	Salzburg
Staatsangehörigkeit:	Österreich

Ausbildung:

1993–1997:	Volksschule Mülln, Salzburg
1997–2005:	Akademisches Gymnasium, Salzburg Ablegung der Reifeprüfung mit gutem Erfolg
Seit 2005:	Lehramtsstudium Mathematik/Geschichte, Universität Wien
Seit 2010:	Bachelorstudium Politikwissenschaft, Universität Wien
Seit 2010:	Bachelorstudium Wirtschaftsrecht, Wirtschaftsuniversität Wien